NICHT-AUTONOME DIFFERENTIALSPIELE

Hartmut Hauptmann

1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545804_0100

Nicht-autonome Differentialspiele

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät

der Ludwig-Maximilians-Universität

zu München

vorgelegt von

Hartmut Hauptmann

1968

DISSERTATIONSDRUCK -SCHÖN- München 23 · Belgradstraße 11

Referent: Prof. Dr. Eberhard M. Fels
Korreferent: Prof. Dr. Louis Perridon

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Dezember 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während eines Studienaufenthaltes am Georgia Institute of Technology, der mir durch ein Fulbright-Stipendium ermöglicht wurde, und während meiner Tätigkeit am Seminar für Ökonometrie und Statistik. Dem Leiter des Seminars, Herrn Professor Dr. Eberhard M. Fels danke ich für das äußerst interessante Arbeitsgebiet und viele Ratschläge.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung 1

1 Die Formulierung des Spieles 10

1.1 Ein Beispiel 10

1.2 Die grundlegenden Annahmen 13

1.3 Optimale Pfade 24

2 Die Minimax-Gleichung von R. Isaacs 36

2.1 Die Methode von R. Isaacs 36

2.2 Ein Beispiel mit nicht stetig differenzierbarer Wertfunktion 43

2.3 Die Gleichung von R. Isaacs 53

3 Die Multiplikatormethode 67

3.1 Die Existenz des Multiplikators 67

3.2 Der Multiplikator und die Wertfunktion 76

4 Eine funktionalanalytische Methode 83

4.1 Eine Beschreibung des Spieles 83

4.2 Die Bestimmung des Sattelpunktes 86

4.3 Ein Folge- bzw. Verfolgungsspiel 101

4.4 Eine Anwendung auf die stochastische Kontrolltheorie 108

5 Ein Differentialspiel-Modell in der Duopol-Absatzplanung 109

6 Stochastische Differentialspiele 116

6.1 Ein stochastisches Analogon zur Gleichung von Isaacs 116

6.2 Ein Konvergenzsatz 125

Literaturverzeichnis 130

0 Einleitung

Die Theorie der Differentialspiele wurde 1954 durch Rufus Isaacs begründet. Im Mittelpunkt seines Interesses standen militärische Aufgaben, die Anregung zur Theorie der Differentialspiele waren. So nimmt ein Beispiel, das Spiel des "mörderischen Chauffeurs", einen weiten Raum im Buch R. Isaacs' ein. Ein schnelleres Objekt, dessen Bahn einen bestimmten Krümmungsradius nicht überschreiten kann, (sagen wir ein Auto, das nur vorwärts fahren kann), versucht in kürzest möglicher Zeit mit einem langsameren, aber beweglicheren Objekt (sagen wir: ein Fußgänger) zu kollidieren. Die Frage ist dann, kann der Verfolger sein Ziel überhaupt erreichen und wenn ja, wie soll er dies auf bestmögliche Art und Weise tun. Diese Art von Theorie läßt sich auch auf die Kollisionsvermeidung von Flugzeugen und Schiffen anwenden.

Wenden wir die Theorie der Differentialspiele auf Unternehmungen an, so führt die spieltheoretische Situation zu eigenartigen Verhaltensformen. Nehmen wir wie in vielen einfacheren theoretischen Modellen an, die Unternehmen hätten als einziges Ziel die Gewinnmaximierung. Dann befinden sich die Unternehmen, wenn das Spiel wie in unserer Untersuchung ein Nullsummen-Spiel ist, in einem nicht überzeugenden Kampf, in dem die Verluste des Rivalen ebenso wünschenswert sind wie die eigenen Gewinne. Die An-

wendung von direkten und drastischen Mitteln bei der Bekämpfung des Opponenten führt zu eigenartigen Spielen mit machiavellistischen Tendenzen.

Die Methoden dieser Arbeit kommen aus verschiedenen Gebieten. Im wesentlichen sind es Spieltheorie, der die Formulierung des Problemes entnommen ist, Kontrolltheorie, Variationsrechnung, Funktionalanalysis und dynamisches Programmieren. Dies sind bis auf die Variationsrechnung und die Funktionalanalysis alles relativ junge Disziplinen der Mathematik. Leider finden sich in der Arbeit keine Sätze über gemischte Erweiterungen der betrachteten Spiele. Dies hat zwei Gründe. Erstens: die zulässigen Strategien, sie werden bei uns "Kontrollfunktionen" heißen, bilden Funktionenräume, die zu reichhaltig sind. Zweitens läßt sich die Idee, kontinuierlich zu randomisieren, bis jetzt noch nicht formal beschreiben.

Etwas besser sähe es für den Fall integraler Nebenbedingungen aus, wie sie zum Beispiel in der Statistik beim Lemma von Neyman und Pearson vorkommen. Dann kann man gewisse Klassen linearer Funktionale bilden, die eine gemischte Erweiterung des Spieles ergeben. Die dazu benützten mathematischen Hilfsmittel sind tiefliegend.

Nun möchten wir in groben Umrissen die Beschreibung eines Differentialspieles geben. Die beiden Spieler treffen ihre Entscheidung kontinuierlich durch die Wahl von Kontrollvariablen. Diese wiederum bestimmen zusammen mit der Ausgangssituation den Wert der Zustandsveränderlichen

des Spieles oder kürzer den Zustand des Spieles. Formal sieht dies dann folgendermaßen aus. Sei x der Zustand des Spieles, t der augenblickliche Zeitpunkt, y die Wahl für den Wert der Kontrollfunktion von Spieler I und z die von Spieler II. Der Zustand x, und das ist das wesentliche Merkmal der hier behandelten Theorie, hängt über eine Differentialgleichung von den Kontrollen oder Strategien der beiden Spieler ab. Wir schreiben

$$x' = g(t, x, y, z)$$

Die Kontrollfunktionen über den Zeitablauf hinweg schreiben wir Y(t,x(t)) und Z(t,x(t)). Wir nennen obige Differentialgleichung die "Zustandsgleichung" oder "kinematische Gleichung". Dies geschieht in Anlehnung an die Kontrolltheorie.

Nach Beendigung des Spieles zum Zeitpunkt T erhält der Spieler I die Auszahlung

$$h(T,x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), Y(t, x(t)), Z(t, x(t))) \, dt$$

Das Problem, an dem wir arbeiten werden, ist dann das Auffinden von Sattelpunkten dieses Funktionals bezüglich geeigneter Klassen von zulässigen Kontrollfunktionen Y und Z.

Die Spiele, die wir betrachten, sind von vollständiger Information und lassen Behavior-Strategien zu. Wir meinen damit, daß der Zustand des Spieles jedem Spieler in jedem Augenblick bekannt ist und daß dieser die einzig

relevante Information für seine Entscheidung bezüglich des Wertes der Kontrollfunktion ist. Würde ein Spieler durch einen anderen ersetzt, so brauchte ihm nur der momentane Zustand des Spieles mitgeteilt zu werden. Zusätzliche Information über die Vergangenheit würde ihm keinen zusätzlichen Vorteil verschaffen.

Da Y und Z Vektoren beliebiger fester endlicher Dimension sein können, enthält die Theorie, wie wir sie darstellen, eine Theorie der Mehrpersonen-Spiele, bei der aber die Koalitionen fest vorgegeben sind. Hier ergibt sich eine Anwendung auf die stochastische Kontrolltheorie, wo unter zusätzlichen Kosten eine der Komponenten, die bisher zufällig war, eine neue Komponente der Kontrollfunktion wird. Dann kann der Wert des alten Spieles plus Kosten mit dem Wert des neuen Spieles verglichen werden, um so eine Entscheidung zu treffen.

Ebenso wie wir keine Sätze über gemischte Erweiterungen angeben könnten, fehlt auch der Zugang zu Nicht-Nullsummen-Spielen. Als Rechtfertigung dazu möchten wir R. Bellman zitieren:

> "There is no satisfactory theory for non-zero sum games, and the evidence is rather overwhelming that there never will be ".

Noch 1957 schreiben Leonard D. Berkovitz und W. H. Fleming in ihrem gemeinsamen Aufsatz, daß eine präzise brauchbare mathematische Formulierung des Differentialspielproblems eine nicht triviale Aufgabe sei. So fällt auch

das Kapitel 1, in dem wir zuerst ein kleines Beispiel ohne Wert geben, sehr lang aus. Wir müssen, um unsere Theorie zu zeigen, entweder sehr scharfe und genaue Annahmen machen oder wir müssen uns mit einer heuristischen Argumentation zufrieden geben. Wir möchten den ersten Weg gehen. Der Aufwand an mathematischer Technik wird dabei, ebenso wie an manchen Stellen die Unübersichtlichkeit, groß. Aber nur auf diese Weise lassen sich Lev S. Pontrjagins Einwände gegen die Technik des dynamischen Programmierens von Bellman, auf die der Beweis der Gleichung von Isaacs aufbaut, entkräften.

In 1.2, bei der Einschränkung der zulässigen Sattelpunkte haben wir in Bedingung (c), die keine tangentialen Pfade an Unstetigkeitsmannigfaltigkeiten zuläßt, eine Forderung, von der wir uns gerne freimachen würden. Bei uns geht sie aber wesentlich in den Beweis der Sätze ein und es gibt vorläufig keine Möglichkeit, diese Bedingung bei der Darstellung der Resultate von 2.3, 3.1 und 3.2 wegzulassen.

Dann beschäftigen wir uns noch ausführlich mit den Eigenschaften optimaler Pfad. Dabei erweist sich besonders 1.3 Satz 2 für den Fortgang der Untersuchung als wichtig.

In Kapitel 2.1 befassen wir uns mit der Methode von Isaacs und gehen dabei kurz auf ihre Schwächen ein. Wir wollen dabei nicht verschweigen, daß das Lösen selbst eines kleinen Beispiels oft schwieriger sein kann als der Beweis der Methode, mit der es gelöst werden soll. Wollen

wir die Methode von Isaacs anwenden, so haben wir Schwierigkeiten auf Mannigfaltigkeiten der Unstetigkeit von beiden Kontrollfunktionen. Dies führt zu nicht stetig differenzierbaren Wertfunktionen. Im folgenden rechnen wir explizit ein Beispiel mit nicht stetig differenzierbarem Wert durch. Dies geschieht elementar.

Der Satz 1 in 2.3 ist eines der Hauptresultate der Arbeit. Wir erhalten unter den Annahmen von 1.2 die Minimax-Annahme von Isaacs als Bedingung, die bei optimalem Spiel gelten muß. Dazu erhalten wir eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Wertfunktion, die Gleichung von Isaacs. Sie ist vom Hamilton-Jacobi-Typ. Auf Mannigfaltigkeiten der Unstetigkeit beider Kontrollfunktionen gilt diese Gleichung für einseitige Grenzwerte. Die Beweismethode ist eng verwandt mit der Idee des dynamischen Programmierens. 2.3 Satz 3 liefert eine Begründung für den Erfolg von Isaacs bei vielen praktischen Anwendungsbeispielen. Die Wertfunktion ist nämlich stetig differenzierbar auf Unstetigkeitsmannigfaltigkeiten nur einer der Kontrollfunktionen.

Die Multiplikatormethode des dritten Teiles steht in enger Beziehung zum Maximumprinzip von Pontrjagin. In diesen Ausführungen ist aber die Klasse der zulässigen Kontrollfunktionen wesentlich enger. Ursache ist die reguläre Zerlegung des Zustandsraumes, die wir für die Beweise benötigen. Mit der Multiplikatormethode lassen sich zumindest im Prinzip Aufgaben lösen, bei denen das Isaacssche

Verfahren versagt. Schwierigkeiten bei der praktischen Rechnung bereitet der Umstand, daß die Unstetigkeitsstellen der Kontrollfunktionen im voraus nicht bekannt sind.

In Kapitel 4 versuchen wir, das Differentialspielproblem mit vollkommen andersartigen Mitteln zu beleuchten. Es sind die funktionalanalytischen Methoden der Kontrolltheorie und der Satz von Kuhn und Tucker für nicht lineares Programmieren. Die Einschränkung auf eng begrenzte Klassen von Zustandsgleichungen und Auszahlfunktionen erscheint uns gerechtfertigt. Besonders die Kontrolltheorie befaßt sich mit vollkommen analogen Problemstellungen. Wir erhalten in diesem Abschnitt, wenn auch unter ziemlich starken Annahmen, den einzigen Existenzsatz dieser Arbeit. Uns erscheint im Augenblick der Ausbau funktionalanalytischer Methoden als erfolgversprechend für die Lösung weiterer Probleme. Insbesondere könnten sich numerisch wirkungsvolle Verfahren zur tatsächlichen Berechnung von Kontrollfunktionen ergeben. Auffällig ist auch, daß diese Klasse von Spielen in vielen Fällen zu Kontrollfunktionen führt, die sich stetig ändern. Wir haben ansonsten kaum Beispiele mit dieser Eigenschaft gefunden. Das Verfolgungsspiel, bei dem das Benutzen der Kontrollfunktionen nicht mit Kosten verbunden war, führte auch sofort wieder zu "Bang-Bang"-Strategien. Dies ist auch in der Kontrolltheorie oft der Fall. Die optimalen Steuerungen liegen meist auf dem Rand des zulässigen Gebietes.

Im nächsten Kapitel versuchen wir, ein Modell zu bauen, das sich wirtschaftlich anwenden läßt.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns mit stochastischen Differentialspielen. Dies ist das bisher am wenigsten entwickelte Gebiet dieser Theorie und auch der Satz, den wir beweisen können, muß etwas unbefriedigend wirken. Wir bauen das stochastische Spiel, indem wir ein deterministisches durch einen Brownschen Prozess stören. Die Bewegungs- oder Zustandsgleichungen beschreiben dann einen kontrollierbaren Diffusionsprozess. Da die Strategien nicht von der Vergangenheit abhängen, sondern nur durch den gegenwärtigen Zustand bestimmt werden, könnte man diese Spiele auch Markov-Spiele mit kontinuierlicher Zeit und kontinuierlichem Zustand nennen. Die Methode, die wir anwenden, ist die Zeit zu diskretisieren und dann die Grenzprozesse zu untersuchen. Die Ergebnisse sind aber wesentlich schwächer als in der deterministischen Theorie. Leider ist es unbekannt, und wir wissen auch nicht, in welcher Richtung wir zu suchen haben, welche Techniken der Behandlung stochastischer Differentialspiele angemessener sind. Die Ergebnisse von Lars Erik Zachrisson (1964) über Markov-Spiele tragen zu sehr diskreten Charakter, um sie auf kontinuierliche Spieltypen übertragen zu können. An dieser Stelle der Arbeit liegen wohl noch die meisten offenen Fragen.

Ein weiteres Problem, das in dieser Arbeit ausgespart wurde, sind Spiele mit unvollständiger Information. Isaacs meint dazu, sie würden, falls erforscht, von erstaunenswerter Kompliziertheit sein. Diese Art von Differential-

spielen ist noch nicht einmal in dem Zustand, in dem man das Problem allgemein sinnvoll formulieren kann. Auch der Beitrag von Isaacs beschränkt sich auf das Stellen von ungelösten Problemen und makabre Beispiele. Ein möglicher Zugang zu Differentialspielen mit unvollständiger Information könnte sich vielleicht durch die eben im Entstehen begriffene Theorie der Kontrolle von nur teilweise beobachtbaren Diffusionsprozessen ergeben.

1 Die Formulierung des Spiels

1.1 Ein Beispiel

Zuerst soll ein kleines Beispiel (Leonard D. Berkovitz, 1964, S. 175) zeigen, wie selbst einfache Problemstellungen zu nicht finiten Spielen, d.h. Spielen ohne Wert führen. Die Situation sei auf folgende Weise beschrieben:

Spieler I wählt $y = Y(t,x)$ und

II wählt $z = Z(t,x)$, wobei

$0 \leq Y(t,x), Z(t,x) \leq 1.$

Beide Kontrollfunktionen seien stückweise stetig differenzierbar.

Der Zustand des Spieles, (in diesem Fall seine einzige Phasenkoordinate), wird durch die Differentialgleichung

$$x' = (y-z)^2 \tag{1}$$

und die Anfangsbedingung $x(0) = x_o$ gegeben.

Das Spiel wird zu einer vorbestimmten Zeit T beendet. Ziel von I ist die Auszahlfunktion

$$\int_0^T x \, dt \tag{2}$$

zu maximieren. II möchte das Gegenteil erreichen.

Dieses Spiel besitzt keine Lösung in reinen Strategien und auch keinen Wert. Wir können also nicht einmal -effektive Kontrollfunktionen Y,Z mit den geforderten Eigenschaften angeben.

Zu jeder beliebigen Wahl Y von I kann II ebenfalls dieselbe Strategie Z = Y benützen und so jede Änderung der Phasenkoordinate verhindern.

Entlang des Pfades von x gilt $x' = 0$. Die daraus resultierende Auszahlung ist $x_0 T$.

So haben wir

$$\max_y \min_z \int_0^T x \, dt \leq x_0 T \tag{3}$$

Da aber $\int_0^T x \, dt \geq x_0 T$ für jedes Paar Kontrollfunktionen Y,Z gilt, folgt

$$\max_y \min_z \int_0^T x \, dt = x_0 T \tag{4}$$

Betrachten wir nun die umgekehrte Situation:
Spieler II wählt eine Kontrollfunktion Z. Dann kann für I folgende Strategie definiert werden:

$$Y(t,x) = 1 \qquad \text{für } Z(t,x) \leq 1/2$$
$$Y(t,x) = 0 \qquad \text{für } Z(t,x) > 1/2.$$

So wird $x' = (y-z)^2 \geq \frac{1}{4}$ für $0 \leq t \leq T$.
Wir erhalten für den Minimaxwert die Abschätzung

$$\min_z \max_y \int_0^T x \, dt \geq \int_0^T (x_0 + 1/4\, t)\, dt = x_0 T + 1/8\, T^2. \tag{5}$$

Wählt nun II die Kontrollfunktion $Z(t,x) = 1/2$, dann ist $x' \leq 1/4$ für das eben beschriebene Y. Vergleichen wir das daraus gewonnene Resultat mit obiger Abschätzung (5), sehen wir, daß

$$\min_z \max_y \int_0^T x \, dt = x_0 T + 1/8\, T^2. \tag{6}$$

Die Gleichungen (4) und (6) zeigen, daß dieses Spiel keine Lösung und auch keinen Wert in reinen Strategien besitzt. Um solche Fälle bei der analytischen Behandlung auszuschließen, müssen wir bei der genauen Formulierung des Problems behutsam vorgehen und durch Annahmen entsprechende Vorkehrungen treffen. Insbesondere werden wir die Existenz von Sattelpunkten, d.h. Lösungen in reinen Strategien voraussetzen. Gibt es mehrere Sattelpunkte, so ist es weiter nicht störend, denn in einem Zweipersonen-Nullsummenspiel sind diese alle äquivalent.

1.2 Die grundlegenden Annahmen

Zuerst einige Definitionen:

Ein Vektor x heißt positiv genau dann, wenn für $x = (x_1,\ldots,x_n)$ alle Komponenten positiv sind.

Eine reele Funktion h (t,x) gehört zu $C^{(k)}$ in x auf ihrem Definitionsgebiet D. dann und nur dann, wenn h (t,x) stetig in (t,x) ist und die Ableitungen von h bezüglich x bis zur k-ten Ordnung existieren und stetig sind.

$D_1,\ldots,D_m$ bilden eine Zerlegung von D, wenn gilt:

a) D_i ist zusammenhängend mit stückweise glattem Rand für $i = 1,\ldots, m$

b) $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$

c) $\bigcup_{i=1}^{m} \bar{D}_i = \bar{D}$,

wobei mit $\bar{D}_i$, $\bar{D}$ der Abschluß der jeweiligen Gebiete bezeichnet wird. Der Abschluß ist die Vereinigung eines Gebietes mit seinem Rand.

Eine reelle Funktion h heißt stückweise $C^{(k)}$ in x auf D, wenn es eine Zerlegung von D gibt, so daß auf jedem D_i die Funktion h mit einer Funktion übereinstimmt, die auf D_i zu $C^{(k)}$ in x gehört.

Eine vektorwertige Funktion heißt stückweise zu $C^{(k)}$ in x auf D gehörig, wenn jede Komponente stückweise $C^{(k)}$ auf D ist.

Im folgenden werden wir präzisieren, auf welche Klasse von Spielen die Analysis der nächsten Abschnitte anwendbar ist. Sei x ein n-dimensionaler Vektor, y ein r-dimensionaler Vektor und z ein r'-dimensionaler Vektor, das Gebiet G, in dem das Spiel stattfindet, ein beschränktes Gebiet des (t,x)-

Raumes. Weiterhin sei ein beschränktes Gebiet S des (t,x,y,z)-Raumes gegeben. Wir nehmen an, daß G in der Projektion von S in den (t,x)-Raum enthalten ist.

1) Die Funktionen f und g.

f sei eine reellwertige Funktion f(t,x,y,z) und g eine n-dimensionale vektorwertige Funktion

$$g = (g_1(t,x,y,z),\ldots, g_n(t,x,y,z)).$$

Wir müssen von f und g annehmen, daß sie auf S der Klasse $C^{(1)}$ angehören.

2) Die Nebenbedingungen für Y und Z.

Die Abbildung $\Omega(t,x)$ bilde Punkte (t,x) aus G auf Untermengen eines r-dimensionalen Euklidischen Raumes ab und Ω' bilde (t,x) aus G auf Teilmengen eines r'-dimensionalen Euklidischen Raumes ab. Dazu verlangen wir für Ω und Ω' die Eigenschaft

$$(t,x,\Omega(t,x),\Omega'(t,x)) \in S \qquad \text{für alle } (t,x) \in G.$$

3) Die Endfläche

Sei E_i', $i = 1,\ldots, m$, eine Kollektion n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten der Klasse $C^{(1)}$ und

$$E_i' \subset G \qquad \text{für } i = 1,\ldots, m.$$

Ferner mögen die E_i' eine Parameterdarstellung

$$(1) \quad t = T_i(s) \qquad \text{und} \qquad x = \chi_i(s)$$

haben, wobei $s = (s_1, \ldots, s_n)$ einen Würfel im n-dimensionalen Raum durchläuft.

Dann wählen wir je eine zusammenhängende Teilmannigfaltigkeit $E_i \subset E_i'$ und bilden

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i .$$

Wir nennen E die Endfläche (terminal surface) des Spieles.

4) Die Endauszahlung h.

Sei G_1 ein Teilgebiet von G, so daß $E \subset G_1$ und h eine reelle Funktion der Klasse $C^{(1)}$ auf G_1 ist. Damit ist h auch auf E definiert und gehört zu $C^{(1)}$ für jedes E_i. Wir nennen h die Endauszahlfunktion und ihre Werte $h(T, x_T)$ die Endauszahlung.

5) Die Strategien oder Kontrollfunktionen.

Die Aussonderung von zulässigen Klassen von Strategien gehört zu den einschränkendsten Teilen der Theorie der Differentialspiele und erfordert besondere Vorsicht.

Sei R ein in G enthaltenes Gebiet, so daß die Endfläche E einen Teil des Randes von R bildet. Den Abschluß von R schreiben wir $\bar{R}$. Zusätzlich müssen wir voraussetzen, daß E das Gebiet G in zwei disjunkte Stücke teilt. Das Gebiet R ist nun die Teilmenge des (t,x)-Raumes, in dem die Phasenkoordinate des Spieles verläuft, oder mit anderen Worten die Menge der möglichen Zustände, mit deren Beschreibung wir uns befassen.

$\mathfrak{N}$ sei die Klasse von Funktionen Y, die einmal stück-

weise stetig partiell in x differenzierbar auf $\bar{R}$ sind.
Die Y(t,x) sind r-dimensionale Vektoren, die der Bedingung

$$Y(t,x) \in \Omega(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \bar{R}$$

erfüllen.
Ebenso sei $\mathfrak{Z}$ die Klasse von Funktionen Z(t,x), die stückweise $C^{(1)}$ in x auf $\bar{R}$ sind. Die Z(t,x) sind r'-dimensionale Vektoren für die

$$Z(t,x) \in \Omega'(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \bar{R}$$

gilt.

Zusätzlich müssen wir noch fordern, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ nicht leer sind.

Betrachten wir das System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$x'(t) = g(t,x,Y(t,x),Z(t,x)) \tag{2}$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(t_o) = x_o \tag{3}$$

und $Y \in \mathfrak{M}$, $Z \in \mathfrak{Z}$.

Ist (t_o,x_o) eine Unstetigkeitstelle von Y oder Z oder von beiden, Y und Z, dann kann es mehr als eine Lösung von (2) geben, die der Anfangsbedingung (3) genügt. Weiterhin kann sich eine Lösung, die in einer Umgebung von t_o eindeutig ist, an irgendeinem Punkt der Trajektorie aufspalten, an dem Y oder Z oder auch beide unstetig sind.

Dazu ein ganz einfaches Beispiel. Wir brauchen, um den

oben beschriebenen Sachverhalt darzustellen lediglich die Abhängigkeit von einem Kontrollparameter.

Nehmen wir die Differentialgleichung

$$x' = Y$$

und setzen Y = sign x, so erhalten wir folgendes Bild:

Dabei ist x = 0 eine Unstetigkeitskoordinate von Y(t,x). Dies ist auch eines der einfachsten Beispiele zu dem Begriff der regulären Zerlegung (s.u. 1.2.10)).

Sind Y und Z in einer Umgebung von (t_o, x_o) stetig, dann gibt es eine eindeutige Lösung von (2), die die Randbedingung (3) erfüllt. Dies gilt, da g, Y und Z zu $C^{(1)}$ gehören. (Siehe Bieberbach, Ludwig,1956, Satz 1.6.III, S. 56)

6) Spielbare Paare

Wir nennen (Y, Z) mit $Y \in \mathfrak{N}$ und $Z \in \mathfrak{Z}$ ein spielbares Paar, falls für jedes (t_o, x_o) in R jede Lösung von (2), die der Randbedingung (3) genügt, in R verläuft und E in endlicher Zeit erreicht.

7) Die Auszahlfunktion

Für jedes spielbare Paar können wir eine möglicherweise mehrwertige Funktion P wir folgt definieren:

$$(4) \quad P(t_o,x_o,Y,Z) = h(t_e,x_e) + \int_{t_o}^{t_e} f(t,x(t),Y(t,x(t)),Z(t,x(t)))dt.$$

Dabei ist x(t) eine Lösung von (2) mit Anfangsbedingung (3), und (t_e, x_e) ist der Punkt, an dem der Graph der Lösung x(t) die Mannigfaltigkeit E schneidet. P ist die Auszahlung des Spiels.

8) Reine Strategien

Weiter müssen wir annehmen, daß es zwei nicht leere Teilklassen $\mathcal{Y}_o \subset \mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}_o \subset \mathcal{Z}$ gibt, so daß aus

$Y \in \mathcal{Y}_o$ und $Z \in \mathcal{Z}_o$ folgt:

(Y, Z) ist ein spielbares Paar.

Sei nun $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$ das maximale Paar von Teilklassen mit dieser Eigenschaft, dann heißen die Funktionen $Y \in \mathcal{Y}_1$ und $Z \in \mathcal{Z}_1$ reine Strategien.

Nun kann man die Spielsituation beschreiben. Gegeben ist eine Anfangsposition (t_o, x_o); Spieler I wählt eine reine Strategie $Y \in \mathcal{Y}_1$ mit dem Ziel, $P(t_o,x_o,Y, Z)$ zu maximieren. Spieler II wählt eine reine Strategie $Z \in \mathcal{Z}_1$ mit der Absicht, $P(t_o, x_o, Y, Z)$ zu minimieren.

9) Sattelpunkte

Sei (Y^*, Z^*) ein spielbares Paar, so daß die Auszahlung

$P(t, x, Y^*, Z^*)$ einwertig auf R ist. Mit andren Worten, gibt es mehr als einen Pfad, der von (t, x) ausgeht, so sind alle Werte von $P(t, x, Y, Z)$ gleich. Wir schreiben diesen gemeinsamen Wert als $W(t, x)$. Gilt weiterhin für alle $Y \in \mathcal{Y}_1$ und alle $Z \in \mathcal{Z}_1$ die Ungleichung

$$(5) \qquad P(t,x, Y, Z^*) \leq W(t,x) \leq P(t, x, Y^*, Z)$$

für alle $(t,x) \in R$, so heißt (Y^*, Z^*) Sattelpunkt relativ zu den Klassen $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Z}_1$. Die Strategien bzw. Kontrollfunktionen Y^* und Z^* nennen wir dann optimal. Dies können wir tun, da es sich um ein Zweipersonen-Nullsummen-Spiel handelt. $W(t,x)$ ist der Wert des Spieles.

Die Bezeichnung $\phi^*_{(k)}(t)$ oder $\phi^*_{(k)}(t, t_o, x_o)$ benutzen wir für Pfade, die bei (t_o, x_o) beginnen und aus den Kontrollfunktionen (Y^*, Z^*) resultieren. Solche Pfade wollen wir optimale Pfade nennen. Der Index k dient dazu, zwischen verschiedenen Pfaden, die möglicherweise in (t_o, x_o) entspringen, zu unterscheiden. Für die folgende Analysis brauchen wir, ebenso wie man bei der Ableitung der Bellmanschen Funktionalgleichung die Existenz von optimalen Strategien voraussetzt, die Existenz eines Sattelpunktes (Y^*, Z^*).

Nun müssen wir noch die Klasse der zulässigen Sattelpunkte einschränken. Dazu benötigen wir eine Verschärfung des Begriffs der Zerlegung, der auf Berkovitz, 1964, S. 127 zurückgeht.

10) Die reguläre Zerlegung

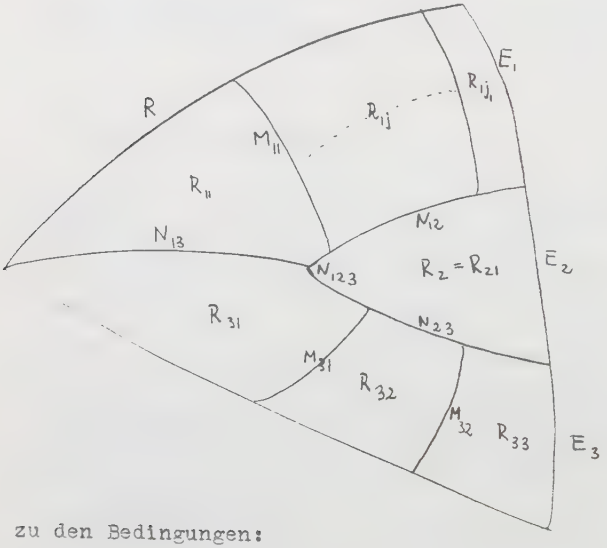
Die Zerlegung eines Gebietes R heißt regulär, wenn wir Teil-

gebiete R_i von R angeben können,

$$R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{1j_1}, R_{21}, \ldots, R_{2j_2}, \ldots, R_{mj_m}$$

so daß folgende Bedingungen (a) bis (f) erfüllt sind.

Zuerst wollen wir aber ein Bild zur Veranschaulichung der Symbole bringen; dazu nehmen wir $m = 3$, $j_2 = 1$ und j_1 fest:



Nun zu den Bedingungen:

(a) Die Gebiete R_i, die durch

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} R_{ij} \cap R \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

definiert werden, bilden eine Zerlegung von R.

(b) R_i liegt immer auf derselben Seite von E_i für $i = 1, \ldots, m$

und $R_i \cap E_k = \emptyset$ für $i \neq k$.

(c) $\overline{R}_{ij_i} \cap E_i \neq \emptyset$ für $i = 1,\ldots, m$ und

$\overline{R}_{ij} \cap E_i = \emptyset$ für $j \neq j_i$.

(d) Für $i = 1,\ldots, m$ und $j = 1,\ldots, j_i-1$ definieren wir M_{ij} als

$$M_{ij} = (\overline{R}_{ij} \cap \overline{R}_{i,j+1}) \cap R_i$$

Dazu fordern wir, daß M_{ij} eine zusammenhängende, orientierte Mannigfaltigkeit der Klasse $C^{(1)}$ mit Dimension n ist. Ferner habe M_{ij} eine Parameterdarstellung.

(6) $$t = T_{ij}(s); \qquad x = \chi_{ij}(s)$$

bei der $s = (s_1,\ldots, s_n)$ einen Würfel im $\mathbb{R}^n$ durchläuft.

(e) Jede Mannigfaltigkeit M_{ij} teilt R_i in zwei fremde Teilgebiete, so daß jedes dieser Gebiete ganz auf einer Seite von M_{ij} liegt.
Es gelte

$$\overline{M}_{ij} \cap \overline{M}_{ik} = \emptyset \qquad \text{für } j \neq k$$

und $i = 1,\ldots, m$, mit $j, k = 1,\ldots, j_i-1$.

(f) Für jede Teilmenge $\{i_1,\ldots, i_k\}$ von $\{1,\ldots, m\}$ definieren wir

$$N_{i_1,\ldots, i_k} = (\overline{R}_{i_1} \cap \ldots \cap \overline{R}_{i_k}) \cap R.$$

$N_{i_1,\ldots,i_k}$ ist entweder leer oder eine zusammenhängende

nichtsinguläre differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die Parametrisierung der M_{ij} mit Hilfe eines einzigen Würfels geschieht aus Gründen der Vereinfachung ebenso wie das bei den E_i der Fall war.

Wir führen jetzt noch einige Bezeichnungen ein, die im folgenden gebraucht werden. Manchmal werden wir die Mannigfaltigkeit der Endzustände E_i als M_{ij_i} schreiben. M_{io} definieren wir als die Vereinigung aller $N_{i_1,\ldots,i_k}$, so daß i zu $\{i_1,\ldots,i_k\}$ gehört.

Nun definieren wir noch

$$
\begin{aligned}
R^{+}_{ij} &= R_{ij} \cup M_{ij} \\
R^{-}_{ij} &= R_{ij} \cup M_{i,j-1} \qquad (7) \\
\widetilde{R}_{ij} &= R_{ij} \cup M_{ij} \cup M_{i,j-1}
\end{aligned}
$$

für $i = 1,\ldots, m$ und $j = 1,\ldots, j_i$.

11) Einschränkung der zulässigen Sattelpunkte

Wir formulieren jetzt Bedingungen, die (Y^*, Z^*) erfüllen muß. Da Y^* und Z^* stückweise $C^{(1)}$ in x sind, gibt es zu diesem Paar eine Zerlegung von R, $\overline{R} = \bigcup \overline{B}_k$, mit der Eigenschaft:

auf jedem B_k sind Y^* und Z^* in x aus $C^{(1)}$.

Die Bedingungen, die der Sattelpunkt erfüllen muß, sind:

(a) Die zu (Y^*, Z^*) gehörige Zerlegung ist eine reguläre Zerlegung.

(b) Ist (t_o, x_o) ein Punkt von R^{-}_{ij}, $i = 1,\ldots, m$, $j = 1,\ldots, j_i$ dann gibt es genau einen optimalen Pfad

$$\phi^*(t, t_o, x_o) = \phi^*_{(i)}(t, t_o, x_o)$$

in R_i für $t_o \leq t \leq t_{i,j_i}$.

t_{i,j_i} ist der Zeitpunkt, an dem der optimale Pfad die Mannigfaltigkeit E_i erreicht.

(c) Der optimale Pfad ist weder zu den Mannigfaltigkeiten M_{ik} für $k = j, \ldots, j_i$ und $i = 1, \ldots, m$ noch zu den Mannigfaltigkeiten $N_{i_1, \ldots, i_k}$ tangential.

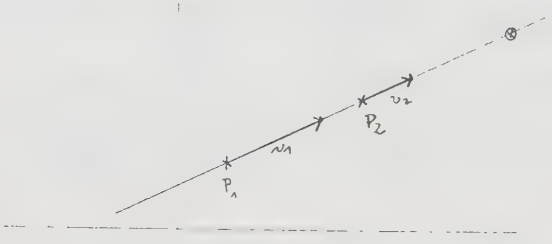
Ist (t_o, x_o) ein Punkt einer Mannigfaltigkeit $N_{i_1, \ldots, i_k}$, dann kann (t_o, x_o) zu Gebieten R_{ij} für verschiedene Werte von i gehören. Bedingungen (b) und (c) gelten dann für jeden dieser Werte von i.

Im allgemeinen werden zu Zeitpunkten t_{ik}, an denen die Trajektorien eine Mannigfaltigkeit M_{ik} schneiden, die Ableitungen $\phi^{*\prime}$ unstetig sein. Die Mannigfaltigkeiten M_{ik} sind ja Mannigfaltigkeiten der Unstetigkeit von mindestens einer der Funktionen Y^* oder Z^*. Bedingung (c) ist dann so zu verstehen, daß die Vektoren $(1, \phi^{*\prime}(t_{ik} + 0, t_o, x_o)$ und $(1, \phi^{*\prime}(t_{ik} - 0, t_o, x_o)$ nicht tangential zu M_{ik} sind. t_{ik} ist der Zeitpunkt, an dem ϕ^* die Mannigfaltigkeit M_{ik} schneidet.

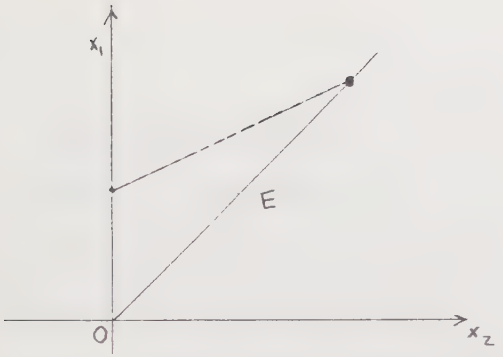
1.3 Optimale Pfade

Nehmen wir zuerst ein einfaches Folgespiel in der Ebene. Der Verfolger P_1 habe die Geschwindigkeit v_1 bei einfacher Bewegung, d.h. er kann seine Richtung abrupt ändern. Dasselbe gelte für den Verfolgten P_2 mit Geschwindigkeit v_2. Damit dieses Spiel in endlicher Zeit endet, nehmen wir $v_1 > v_2$.

In diesem Rahmen gibt es keine Schwierigkeiten durch äußere Gegebenheiten und die Lösung ist offensichtlich. Beide Spieler benützen geradlinige Strategien (Zieba). Sie bewegen sich entlang der Geraden, die die beiden Ausgangspositionen verbindet. P_2 flieht, P_1 folgt. Sie bewegen sich mit ihren maximalen Geschwindigkeiten v_1 und v_2, bis P_1 dann P_2 erreicht.



Um dies zu beschreiben, brauchen wir vier Koordinaten, je zwei für Verfolger und Verfolgten. Da sich optimales Spiel aber auf einer Geraden abspielt, können wir mit zwei Koordinaten auskommen. Nennen wir x_1 die Koordinate von P_1 auf der Spielgeraden und x_2 die von P_2. Nun können wir den Verlauf eines optimalen Pfades $(x_1(t), x_2(t))$ leicht darstellen. Endfläche ist dabei die Gerade $x_1 = x_2$. Nehmen wir der Einfachheit halber



noch $x_1(0) = 0$, so erhalten wir einen optimalen Pfad wie im obigen Bild.

Untersuchen wir nun die Abhängigkeit der optimalen Pfade von der Anfangslage (t_o, x_o) (Berkovitz, 1, 1967). Eine Funktion ist $C^{(k)}$ auf $\bar{D}$, wenn sie $C^{(k)}$ auf D ist und mit ihren Ableitungen eine stetige Ergänzung auf $\bar{D}$ besitzt.

Satz 1 (a) Für alle (t_o, x_o) in R_{ij} gibt es ein $t_{i,j-1} = t_{i,j-1}(t_o, x_o)$ und ein $t_{i,j} = t_{ij}(t_o, x_o)$, so daß für $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{ij}$ die Funktion $\phi^*(t, t_o, x_o)$ definiert ist und die Differentialgleichung

$$x'(t) = g(t, x, Y^*(t,x), Z^*(t,x));$$
$$x(t_o) = x_o$$

erfüllt.

(b) Für alle (t_o, x_o) aus R_{ij} und $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{ij}$ existieren folgende Ableitungen von ϕ^*

$$\phi^*_{t_o}(t, t_o, x_o),\ \phi^*_{x_o}(t, t_o, x_o),$$
$$\phi^{*'}_{t_o}(t, t_o, x_o),\ \phi^{*'}_{x_o}(t, t_o, x_o)$$

und diese sind stetig.

Beweis:

Betrachten wir ein Gebiet R_i. Sei (t_o, x_o) ein Punkt aus R_{ij} für ein j mit $1 \leqslant j \leqslant j_1$. Zu (Y^*, Z^*) gibt es dann genau einen optimalen Pfad in R_i, der von (t_o, x_o) ausgeht und auf $E_i = M_{ij_1}$ endet. Wir lassen den Index i fallen und schreiben diesen Pfad $\phi^*(t, t_o, x_o)$.
Für jedes $j = 1, \ldots, j_1$ sind Y^* und z^* aus $C^{(1)}$ in x auf $\overline{R}_{ij}$. Außerdem ist jede der Mannigfaltigkeiten M_{ij} und $N_{i_1, \ldots, i_k}$ aus $C^{(1)}$. So folgt, daß
1.) für jedes $j = 1, \ldots, j_1$ Funktionen Y^*_{ij} und Z^*_{ij} und ein Gebiet R_{ije}, das R_{ij} im Innern enthält, existieren (reell-differenzierbare Fortsetzbarkeit), so daß Y^*_{ij} und Z^*_{ij} beide $C^{(1)}$ in x auf R_{ije} sind.
2.) Für (t,x) aus R_{ij} ist

$$(8) \qquad Y^*(t,x) = Y^*_{ij}(t,x) \text{ und } Z^*(t,x) = Z^*_{ij}(t,x).$$

Halten wir j fest und betrachten die folgende Differentialgleichung auf R_{ije}

$$(9) \qquad x' = g(t, x, Y^*_{ij}(t,x), Z^*_{ij}(t,x)); \; x(t_o) = x_o$$

mit (t_o, x_o) aus R_{ije}.
Da g in (x, y, z) zur Klasse $C^{(1)}$ gehört, folgt aus den Eigenschaften von $Y^*_{ij}(t,x)$ und $Z^*_{ij}(t,x)$ und aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (L. Bieberbach) die Existenz einer Funktion $\psi_j(t, t_o, x_o)$, definiert für einen Streifen $a(t_o, x_o) < t < b(t_o, x_o)$, so daß ψ_j die eindeutige Lösung von (9) ist. Weiter folgt für (t_o, x_o) aus R_{ije} und

$a(t_o, x_o) < t < b(t_o, x_o)$ die Existenz und Stetigkeit der Funktionen

$$\psi_{ix_o}(t, t_o, x_o), \psi_{it_o}(t, t_o, x_o),$$

$$\psi'_{ix_o}(t, t_o, x_o), \psi'_{it_o}(t, t_o, x_o).$$

Auf R_{ij} stimmt die rechte Seite von (9) mit der rechten Seite von

$$(10) \qquad x' = g(t, x, Y^*(t,x), Z^*(t,x)); \quad x(t_o) = x_o$$

überein.

Aus der Annahme, daß es zu jedem Punkt von R_{ij} einen optimalen Pfad gibt, und aus dem Eindeutigkeitsatz folgt:

zu jedem (t_o, x_o) aus R_{ij} existiert ein $\delta = \delta(t_o, x_o) > 0$, so daß die Lösung $\psi_j(t, t_o, x_o)$ von (9) eindeutig auf dem Intervall $(t_{i,j-1} - \delta, t_{ij} + \delta)$ definiert ist. t_{ij} ist der Zeitpunkt, an dem der Graph von ψ_j die Mannigfaltigkeit M_{ij} schneidet, und $t_{i,j-1}$ derjenige, an dem ψ_j die Mannigfaltigkeit $M_{i,j-1}$ schneidet.

Für (t_o, x_o) aus R_{ij} ist $\phi^*(t, t_o, x_o)$ für $t_o \leq t \leq t_e(t_o, x_o)$ definiert. t_e ist die Zeit, zu der ϕ^* auf E trifft.

ϕ^* genügt der Differentialgleichung (10). Da (9) und (10) auf R_{ij} übereinstimmen, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung für (9), daß

(11) $\phi^*(t, t_o, x_o) = \psi_j(t, t_o, x_o)$ für $t_o \leq t \leq t_{ij}$

Für $t_{i,j-1} \leq t \leq t_o$ können wir ϕ^* als $\psi_j(t, t_o, x_o)$ definieren. So können wir $\phi^*(t, t_o, x_o)$ für (t_o, x_o) aus R_{ij} und $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{ij}$ als die Restriktion von $\psi_j(t, t_o, x_o)$ auf R_{ij} nehmen.
Damit ist der Satz 1 bewiesen.

ϕ^* genügt dem Optimalitätsprinzip, denn es ist optimaler Pfad für jeden Punkt des Graphs. Gehört der Wert (t_o, x_o) zu M_{ij} oder $M_{i,j-1}$ oder ist $t = t_{ij}$ bzw. $t = t_{i,j-1}$, dann sind die Funktionswerte von ϕ^* bzw. die dazugehörigen Ableitungen als aus dem Inneren berechnete Grenzwerte zu verstehen.

Sei nun (t_o, x_o) aus R_{ij} mit $1 \leq j \leq j_1$. Dann schneidet der optimale Pfad $\phi^*(t, t_o, x_o)$ eine der Mannigfaltigkeiten M_{ij} in einem Punkt mit Koordinaten (t_{ij}, x_{ij}), die von (t_o, x_o) abhängen,

(12) $x_{ij} = x_{ij}(t_o, x_o) = \phi^*(t_{ij}(t_o, x_o), t_o, x_o).$

Nach (6) muß der Parameter s, der diesem Punkt auf M_{ij} entspricht, folgende Gleichungen erfüllen:

(13) $t_{ij}(t_o, x_o) = T_{ij}(s)$; $x_{ij}(t_o, x_o) = \chi_{ij}(s)$

und

$$\phi^*(T_{ij}(s), t_o, x_o) - \chi_{ij}(s) = 0.$$

Die Beziehungen zwischen s und (t_o, x_o) wollen wir in Satz 2 festhalten.

Satz 2 (a) Für (t_o, x_o) aus $\widetilde{R}_{ij}$ definiert die Gleichung

$$\phi^*(T_{ij}(s), t_o, x_o) - \chi_{ij}(s) = 0 \tag{14}$$

s als eine $C^{(1)}$-Funktion in (t_o, x_o) für (t_o, x_o) aus $\widetilde{R}_{ij}$.

(b) Die Koordinaten (t_{ij}, x_{ij}) sind $C^{(1)}$-Funktionen von (t_o, x_o).

Beweis:

Nach Voraussetzung sind die Funktionen $T_{ij}(s)$ und $\chi_{ij}(s)$ beide $C^{(1)}$ in (s). Damit folgt Teil (b) sofort aus Teil (a) und (13).

Nun wollen wir Teil (a) beweisen.

Die Gleichung (14) können wir auch

$$\psi_j(T_{ij}(s), t_o, x_o) - \chi_{ij}(s) = 0 \tag{15}$$

schreiben (Satz 1).

Um (a) zu zeigen, müssen wir lediglich nachweisen, daß die Jacobische Funktionaldeterminante von (15) in bezug auf s nicht verschwindet.

$$J = \psi_j'(t_{ij}, t_o, x_o) \frac{\partial T_{ij}(s)}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ij}(s)}{\partial s} \tag{16}$$

$$= \phi^{*\prime}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o)\ \frac{\partial T_{ij}(s)}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ij}(s)}{\partial s}$$

Die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 1 & \phi^{*\prime}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) \\ \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial s} & \dfrac{\partial \chi_{ij}(s)}{\partial s} \end{pmatrix}$$

hat Rang n+1. Dies folgt aus der Annahme, daß der optimale Pfad nicht tangential zu M_{ij} ist (Sattelpunktbedingung (c)).

Durch elementare Umformung erhält man aus N

$$\begin{pmatrix} 1 & \phi^{*\prime}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) \\ 0 & J \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, daß auch J nicht singulär ist. Mit Hilfe des Umkehrsatzes für implizite Funktionen erhält man dann Teil (a) für (t_o, x_o) aus R_{ij}.

Da wir im Beweis die Funktion ψ_j benutzt haben, können wir für (t_o, x_o) aus M_{ij} oder $M_{i,j-1}$ den Funktionen $t_{ij}(t_o, x_o)$ und $x_{ij}(t_o, x_o)$ den Grenzwert von t_{ij} und x_{ij} zuordnen, wenn wir (t_o, x_o) aus dem Inneren von R_{ij} annähern. So ist t_{ij} und x_{ij} aus $C^{(1)}$ auf R_{ij}.
Satz 2 ist damit vollständig bewiesen.

Satz 3 (Pfadfortsetzung)

Sei (t_o, x_o) aus R_{ij} mit $1 \leq j \leq j_1$ und $(t_{ik}, x_{ik}) =$
$= (t_{ik}(t_o, x_o), x_{ik}(t_o, x_o)$ der Punkt, an dem der

Pfad $\phi^*(t_o, x_o)$ die Mannigfaltigkeit M_{ik} für $j \leq k \leq j_1$ schneidet. Dann existieren für jedes k mit $j \leq k \leq j_1$ die Funktionen $\phi^*(t, t_o, x_o)$, $\phi^*_{x_o}(t, t_o, x_o)$, $\phi^*_{t_o}(t, t_o, x_o)$, $\phi^{*'}_{t_o}(t, t_o, x_o)$ und $\phi^{*'}_{x_o}(t, t_o, x_o)$ auf den Intervallen $t_{i,k-1} \leq t \leq t_{ik}$, wobei die Werte an den Stellen $t = t_{i,k-1}$ und $t = t_{ik}$ als der Limes aus dem Inneren von R_{ik} berechnet zu verstehen sind.

Beweis:

Sei nun (t_o, x_o) aus R_{ij} mit $j < j_1$. Wir betrachten nun den optimalen Pfad ϕ^* im Gebiet R_{ij+1}. Die Koordinaten des Punktes, an dem ϕ^* die Mannigfaltigkeit $M_{i,j+1}$ schneidet, sind $(t_{i,j+1}(t_o, x_o), x_{i,j+1}(t_o, x_o)) = (t_{i,j+1}, x_{i,j+1})$. Für $\phi^*(t, t_o, x_o)$ gilt auf dem Intervall $t_{ij} \leq t \leq t_{i,j+1}$

$$\phi^*(t, t_o, x_o) = \phi^*(t, t_{ij}, x_{ij}). \tag{17}$$

Wie im Falle des Gebietes R_{ij} existiert ein Gebiet $R_{i,j+1,e}$, das $R_{i,j+1}$ im Inneren enthält. Analog wie in Satz 1 gibt es Funktionen $Y^*_{i,j+1}$ und $Z^*_{i,j+1}$, die $C^{(1)}$ in x auf $R_{i,j+1,e}$ sind, so daß auf $R_{i,j+1}$

$$Y^*_{i,j+1}(t,x) = Y^*(t,x); \quad Z^*_{i,j+1}(t,x) = Z^*(t,x).$$

Für $(\bar{t}, \bar{x})$ aus $R_{i,j+1,e}$ sei $\quad_{j+1}(t, \bar{t}, \bar{x})$ die Lösung der Differentialgleichung

(18) $\quad x' = g(t,x,\ Y^{*}_{i,j+1}(t,x),\ Z^{*}_{i,j+1}(t,x)); \quad x(\bar{t}) = \bar{x}.$

Ψ_{j+1} und Ψ'_{j+1} haben partielle Ableitungen nach $\bar{t}$ und $\bar{x}$. Diese sind auf dem Definitionsgebiet von Ψ_{j+1} stetig. Mit denselben Argumenten wie in Satz 1 erhalten wir für das Intervall $t_{ij} \leq t \leq t_{i,j+1}$

$$\phi^{*}(t,\ t_{ij},\ x_{ij}) = \Psi_{j+1}(t,\ t_{ij},\ x_{ij})$$

Dies ergibt mit (18)

(19) $\quad \phi^{*}(t,\ t_o,\ x_o) = \Psi_{j+1}(t,\ t_{ij},\ x_{ij})$
für $t_{ij} \leq t \leq t_{i,j+1}$.

Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von Ψ_{j+1}, Satz 2 (b) und (19) folgt für $(t_o,\ x_o)$ aus R_{ij} die Existenz der Funktionen $\phi^{*}_{t_o}$, $\phi^{*}_{x_o}$, $\phi^{*'}_{t_o}$, $\phi^{*'}_{x_o}$ und ihre Stetigkeit in $(t,\ t_o,\ x_o)$ im Intervall $t_{ij} \leq t \leq t_{i,j+1}$.

Zum Zeitpunkt $t = t_{i,j+1}$ werden diese Funktionen als einseitige Grenzwerte aus dem Inneren von $R_{i,j+1}$ gebildet.

Wir können auf diese Weise fortfahren und die behaupteten Eigenschaften von ϕ^{*} in jedem der Gebiete R_{ik} mit $j \leq k \leq j_i$ zeigen.

Ebenso erhalten wir sofort die Ausdehnung von Satz 2 auf die folgenden Mannigfaltigkeiten M_{ik}.

Satz 2* Ersetzt man j durch k, so gilt Satz 2 für $j \leq k \leq j_1$. Somit gilt: die Matrizen

$$\phi^{*\prime}(t_{ik} - 0,\ t_o,\ x_o)\ \frac{\partial T_{ik}}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s}$$

sind für $k = j, \ldots, j_1$ nicht singulär.

Eine weitere direkte Folge sind die Beziehungen

$$\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} = \frac{\partial T_{ik}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_o} \quad ; \quad \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_o} = \frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_o}$$

Nun möchten wir noch eine explizite Darstellung von ϕ^* auf Mannigfaltigkeiten M_{ij} bringen. Dieses Resultat wird später bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren benötigt.

Satz 4 Setzen wir $P_{ij}^+ = (t_{ij},\ x_{ij},\ Y^*_{i,j+1}(t_{ij},\ x_{ij}),\ Z^*_{i,j+1}(t_{ij},\ x_{ij}))$ und $P_{ij}^- = (t_{ij},\ x_{ij},\ Y^*_{ij}(t_{ij},\ x_{ij}),\ Z^*_{ij}(t_{ij},\ x_{ij}))$ so gilt

$$(20) \qquad \phi^*_{x_o}(t_{ij} + 0,\ t_o,\ x_o) = g(P_{ij}^+)\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_o} \ .$$

Beweis:

Differenzieren wir $\phi^*(t,\ t_o,\ x_o) = \psi_{j+1}(t,\ t_{ij},\ x_{ij})$

nach x_o, so erhalten wir an der Stelle $t = t_{ij}$ von links

$$(22) \qquad \phi^*_{x_o}(t_{ij}+0,\ t_o,\ x_o) = \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial t_{ij}}(t_{ij},\ t_{ij},\ x_{ij})\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_o} + \frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial x_{ij}}(t_{ij},\ t_{ij},\ x_{ij})\ \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_o}\ .$$

Da aber

$$\frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial t_{ij}}\ (t_{ij},\ t_{ij},\ x_{ij}) = -\ g(P^+_{ij})$$

und

$$\frac{\partial \psi_{j+1}}{\partial x_{ij}}\ (t_{ij},\ t_{ij},\ x_{ij}) = I \qquad \text{(Einheitsmatrix)}$$

erhalten wir durch Einsetzen in (22) die Behauptung (20).

Den zweiten Teil der Behauptung müssen wir etwas anders behandeln.

Setzen wir $s = s(t_o,\ x_o)$ in $\psi_j(T_{ij}(s),\ t_o,\ x_o) = \chi_{ij}(s)$, erhalten wir eine Identität in $(t_o,\ x_o)$. Differenzieren wir dies nach x_o und denken dabei an (13), so erhalten wir

$$\psi'_j(t_{ij},\ t_o,\ x_o)\ \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_o} + \psi_{j,x_o} - \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_o} = 0.$$

Da in dem Intervall $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{ij}$ für $(t_o,\ x_o)$ aus R_{ij} die Beziehung $\phi^*(t,\ t_o,\ x_o) = \psi_j(t,\ t_o,\ x_o)$ gilt, können wir die letzte Gleichung als

$$\phi^*_{x_o}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) = -\phi^{*\prime}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) + \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_o}$$

schreiben.

Da ϕ^* Lösung der Differentialgleichung (18) ist, gilt

$$\phi^*_{x_o}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) = -g(P^-_{ij})\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_o}.$$

Damit ist der Beweis zu Satz 4 beendet.

ϕ^* ist auch über die Unstetigkeitsstellen der Kontrollfunktionen hinweg stetig. Wie wir gesehen haben, gilt dies für die Ableitungen von ϕ^* nicht mehr. Für diese Stellen haben wir

$$\phi^*_{x_o}(t_{ij} + 0,\ t_o,\ x_o) - \phi^*_{x_o}(t_{ij} - 0,\ t_o,\ x_o) =$$

$$= -(g(P^+_{ij}) - g(P^-_{ij}))\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_o}$$

Ersetzt man in Satz 4 den Index j durch k, so gilt Satz 4 für $j \leq k \leq j_i$.

2 Die Minimax-Gleichung von R. Isaacs

2.1 Die Methode von R. Isaacs

In diesem Kapital werden wir uns mit der Lösungstechnik von R. Isaacs auseinandersetzen. Unter anderem wird sich bei den in dieser Arbeit gemachten Voraussetzungen die Minimaxannahme, nämlich

$$\max_{y}\min_{z}(f + W_{x_o} \cdot g) = \min_{z}\max_{y}(f + W_{x_o} \cdot g),$$

die in der Darstellung von R. Isaacs eine der entscheidenden Voraussetzungen ist, als eine der notwendigen Bedingungen für die Lösbarkeit des Spieles ergeben. In Fällen, bei denen sich f und alle Komponenten von g so zerlegen lassen, daß $f = f_1(t,x,y) + f_2(t,x,z)$ und $g = g_1(t,x,y,) + g_2(t,x,z)$, dann gilt die Annahme von Isaacs. Diese Zerlegbarkeit ist aber selbst bei einfachen Problemstellungen nicht erfüllt, so beim Beispiel 1.1; ebenso bei Steuerungen, die sich multiplikativ beeinflussen.

Bevor wir uns an die exakte Ableitung der Gleichung von Isaacs machen, einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für die Wertfunktion des Spieles, möchten wir diese mit der Idee des dynamischen Programmierens und ohne die Schwierigkeiten, die wir auf Schaltflächen der Kontrollfunktionen überwinden müssen, zeigen. Zuerst möchten

wir noch bemerken, daß ein Spiel mit der Auszahlfunktion

$$\int_{t_o}^{t_e} f(t,x(t),\ Y(t,x(t)),\ Z(t,x(t)))\ dt + h(t_e,\ x_e)$$

durch ein äquivalentes mit reiner Endauszahlfunktion ersetzt werden kann.

Als neue Endmannigfaltigkeit dient E', enthalten in $E \times (-\infty, +\infty)$. Die Parametrisierung von E bleibt erhalten und für die neu hinzugekommene Dimension können wir für einen kompakten zusammenhängenden Teil von $(-\infty, +\infty)$ bis auf Normierung $x_{n+1} = S_{n+1}$ wählen. Zu den n Gleichungen $x' = g$ fügen wir noch

$$x'_{n+1} = f(t,x(t),\ Y(t,x(t)),\ Z(t,x(t)))$$

als Zustandsveränderliche hinzu. Damit ist f die (n+1)te Komponente von g. Die Auszahlung für dieses Spiel ist dann

$$h'(t_e,\ (x_{1e},\ldots,\ x_{ne},\ x_{n+1,e})) = h(t_e,\ x_e) + x_{n+1}(t_e,x_e)$$

für die Anfangsbedingung $(t_o,(x_o,\ 0))$.

Nun wollen wir die Minimax-Gleichung heuristisch mit einer Methode, die Isaacs den Grundsatz vom Übergang nennt, zeigen. Darauf werden wir auch unseren exakten Beweis begründen. Die Idee ist dabei, daß wir es mit einer Familie von Spielen zu verschiedenen Ausgangspunkten zu tun haben. Betrachten wir ein Zeitintervall im Spiel. Am Anfang dieses

Intervalls hat der Pfad einen Punkt (t_1, x_1) erreicht. Nun betrachten wir alle (t_2, x), die am Ende dieses Intervalls für alle zulässigen Kontrollfunktionen erreicht werden können. Setzen wir weiter voraus, daß das Spiel für jeden solchen erreichbaren Punkt bereits gelöst ist, d.h. daß $W(t_2, x)$ bekannt ist. Daraus ersieht man dann für jede Wahl Y, Z in dem Intervall (t_1, t_2) die zu Y, Z gehörige Auszahlung. Y und Z werden dann so gewählt, daß sich der Minimaxwert von P ergibt. Setzen wir $t_2 = t_1 + \varepsilon$, so erhalten wir, lassen wir ε gegen null gehen, eine Differentialgleichung als Resultat.

Führen wir nun diese Überlegung für den Fall, daß $W(t,x)$ aus $C^{(1)}$ ist, durch. Die allgemeinere Behandlung dieser Frage folgt in 2.3 Satz 1.

$W(t_1, x)$ sei bekannt. Eine kurze Zeit später, zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \varepsilon$ sei die Zustandskoordinate unter dem Einfluß der Kontrollfunktionen Y und Z in den Punkt $\bar{x}$ übergegangen. Die Auszahlung beträgt, wenn das Spiel von $\bar{x}$ aus optimal fortgeführt wird,

$$(1) \qquad P(t_1, x, Y, Z) = \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} f(t, x(t), Y, Z)\, dt + W(t_1 + \varepsilon, \bar{x}).$$

Die Idee dieser Überleungen ist es, x als fest zu wählen und verschiedene Werte von $\bar{x}$ zu betrachten, die durch die zulässigen Kontrollfunktionen im Intervall (t_1, t_2) hervorgerufen werden. Wählen wir e so, daß $\bar{x} = x + e$, so gilt wegen W aus $C^{(1)}$

$$(2) \qquad W(t_1 + \varepsilon, x+e) - W(t_1, x) = W_{t_1} \cdot \varepsilon + W_x \cdot e + (\varepsilon, e) \cdot$$

$$\cdot o((\varepsilon, e)).$$

In erster Näherung können wir

$$(3) \qquad e = g(t_1,\ x,\ Y(t_1, x(t_1)),\ Z(t_1,\ x(t_1))) \cdot \varepsilon$$

setzen.

Für das Integral in (1) läßt sich eine Taylorentwicklung dergestalt

$$(4) \qquad \int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} f\ dt = \varepsilon \cdot f(t_1) + 1/2\ \varepsilon^2\ d/dt\ f(t_1 + \delta\varepsilon)$$

angeben, mit $0 < \delta < 1$.

Setzen wir nun (3) in (2) und dieses Resultat zusammen mit (4) in (1) ein, so erhalten wir

$$(5) \qquad P(t_1,\ x,\ Y,\ Z) = W(t_1,\ x) + \varepsilon \cdot (f(t_1,\ x(t),\ Y,\ Z) +$$

$$+ W_t + W_x \cdot g(t_1,\ x(t),\ Y,\ Z)) + a(\varepsilon).$$

Dabei ist $a(\varepsilon)$ eine Funktion, die für ε gegen Null auch gegen Null geht.

Wendet man nun auf (5) den Minimax-Operator an, so wird die linke Seite gleich $W(t_1,\ x)$. Daraus folgt, da $\varepsilon > 0$ ist

$$(6) \qquad \min_Z \max_Y (f(t_1,\ x(t_i),\ Y,\ Z) + W_t + W_x \cdot g(t_1,\ x(t_i),\ Y, Z) +$$

$$+ a(\varepsilon) = 0.$$

Läßt man nun noch $\varepsilon \longrightarrow 0$ gehen, so ist dies die Gleichung von Isaacs.

Für (2) und besonders (4) mußten wir die Voraussetzung benutzen, in unserem Zeitintervall keine Sprungstelle der Kontrollfunktionen zu haben. Dort gilt die Taylorentwicklung von (2) nicht und die stetige Differenzierbarkeit von W braucht an solchen Stellen, wie wir nachher zeigen wollen, nicht zu gelten.

Diese Unstetigkeit der Ableitungen der Wertfunktion ist auch der Grund, daß das Verifikationstheorem von Isaacs nur eine sehr beschränkte Bedeutung hat. Die Frage ist, ob die formal gefundene Wertfunktion und die dazu gehörigen Kontrollfunktionen das gestellte Spielproblem auch wirklich lösen. Dies ist ein schwieriges Problem, denn die Frage nach der Existenz optimaler Kontrollen ist bis jetzt nur für lineare zeitoptimale Kontrollsysteme gelöst. Leider läßt sich das Verifikationstheorem von Isaacs nicht über Unstetigkeitsstellen der Ableitungen von W(t,x) fortsetzen. Um zu zeigen, daß eine gefundene Lösung W(t,x) und der zugehörige Pfad wirklich optimal sind, braucht man eine Verallgemeinerung des Begriffs des Feldes, der aus der Variationsrechnung stammt. Die dazugehörigen Rechnungen erweisen sich fast immer als umfänglich, langwierig und nicht einfach. Vor ähnliche Probleme sieht sich auch die Kontrolltheorie gestellt. und sie sind auch dort nicht befriedigend gelöst. Wir wollen nicht weiter darauf eingehen.

Das zweite wichtige Instrument zur Lösung von Spielen ist die Rückwärtsintegration. Wir kehren die Zeitachse um und arbeiten von E aus ins Innere von R hinein. Von der

Theorie der Differentialgleichungen ist dies naheliegend. Wir können keine entsprechenden Integrale der Pfaldgleichungen ohne Anfangsbedingungen erhalten. Zu den Ausgangsdaten des Spieles gehören aber nur die Werte von $W(t,x)$ auf E. Dies ist im Falle der Auszahlfunktionen, die wir betrachten, die Endauszahlung.

Nennen wir die Zeit, die x benötigt, um E zu erreichen, τ, so haben wir auf optimalen Pfaden

$$\tau = \text{const.} - t.$$

Schreiben wir $\overset{\circ}{x}$ für Ableitungen nach τ, so erhalten wir für (t,x) aus R_{ij}

$$\overset{\circ}{x} = - x'.$$

Die Pfadgleichungen in Rückwärtsschreibweise ergeben sich als

$$(7) \qquad \overset{\circ}{W}_x = W_x(t,x) \cdot g(t, x, Y^*(t, x(t)), Z^*(t, x(t))) +$$

$$+ f_x(t, x(t), Y^*(t, x(t)), Z^*(t, x(t))).$$

Dies gilt für den Fall, im die Kontrollfunktionen durch Konstanten beschränkt sind. Wir werden diese Voraussetzung im folgenden nicht brauchen. Diese Rückwärtspfadgleichungen gehören zu einer Hamilton-Jacobi-Gleichung. Isaacs schreibt dazu, daß er noch keine Mittel gefunden habe, diese Tatsache

auszunutzen. Wir werden im übernächsten Kapitel diese Frage gründlich untersuchen.

Auch bei dieser Methode der Rückwärtsintegration ist leider notwendig, daß $W(t,x)$ aus $C^{(1)}$ ist. Sehen wir uns das Beispiel von Zermürbungs- und Angriffskrieg (Isaacs 5.5) an, so versagt diese Technik für den symetrischen Fall $a_1 = a_2$, d.h. für den Fall, in dem die Waffen von Spieler I dieselbe Effektivität haben wir die von Spieler II.

2.2 Ein Beispiel mit nicht stetig differenzierbarer Wertfunktion

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, werden wir ein Beispiel zu diesem Sachverhalt bringen, bei dem die Rolle des maximierenden Spielers wegfällt. Es gehört zur Kontrolltheorie (L. S. Pontrjagin, u. a., 1967, S. 29; E. B. Lee und L. Markus, 1967, S. 4). Das Lösungsverfahren ist das Maximumprinzip von Pontrjagin oder ebenso die Technik des nächsten Kapitels. Wir befassen uns von vornherein nicht mit der allgemeinen Klasse der meßbaren Kontrollfunktionen, sondern nur mit denen, die stückweise $C^{(1)}$ sind. Da aber die mit der Technik von Pontrjagin gewonnenen Resultate in unserem Beispiel stückweise $C^{(1)}$ sind, gilt das Ergebnis natürlich auch für die Unterklasse der Kontrollfunktionen, die stückweise $C^{(1)}$ sind.

Nun zu dem Beispiel. Gegeben sei ein Punkt $\tilde{x}_o$ auf der reellen Zahlengeraden mit einer Anfangsgeschwindigkeit u_o. Über die Gleichung $\tilde{x}'' = z$ mit $|z| < 1$ können wir das Verhalten des Punktes beeinflussen. Die Frage ist nun die: Wie können wir den Punkt so schnell wie möglich in den Nullpunkt befördern und zwar so, daß er dort die Geschwindigkeit null hat.

Zuerst transformieren wir die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System und gehen dabei zu neuen Phasenkoordinaten über. Wir setzen

$$x_1 = \tilde{x} \quad \text{und} \quad x_2 = \tilde{x}'.$$

Damit erhalten wir das System

$$(8) \qquad x_1' = x_2 \quad ; \quad x_2' = z.$$

Das Problem ist nun das des schnellsten Eintreffens in dem Koordinatenursprung (0,0).

Die Hamilton-Gleichung hat in diesem Falle die Form

$$(9) \qquad H = f + \lambda g = -1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 z, \qquad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Die ursprünglichen Gleichungen erhalten wir aus H:

$$x' = H_\lambda ,$$

und für die Zeitableitungen des Multiplikators gilt:

$$\lambda' = -H_x .$$

Dies ist genau das zu den Pfadgleichungen (7) analoge System. Für λ' erhalten wir

$$\lambda_1' = 0 , \qquad \lambda_2' = - \lambda_1 .$$

Daraus folgt für den Multiplikator

$$\lambda_1 = \bar{c}_1 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \bar{c}_2 - \bar{c}_1 t .$$

Aus dem Maximumprinzip und (9) folgt

(10) $$z = \operatorname{sign} \lambda_2(t) = \operatorname{sign} (\bar{c}_2 - \bar{c}_1 t),$$

da ja $|z| \leq 1$.
Aus (10) ergibt sich, daß jede optimale Kontrollfunktion stückweise konstant ist, nur die Wert ± 1 annimmt und höchstens eine Sprungstelle besitzt. Eine lineare Funktion kann ja in einem Intervall höchstens einmal das Vorzeichen wechseln. Aus (10) ließe sich also $Z(t,x)$ gewinnen, wären die Werte der Konstanten $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ bekannt.

Integrieren wir (8) in dem Intervall, in dem $Z = 1$ ist, so folgt

$$x_2 = t + c_2 \text{ und}$$

$$x_1 = 1/2\ t^2 + c_2 t + c_1 = 1/2(t + c_2)^2 + (c_1 - c_2^2/2).$$

c_1, c_2 sind Integrationskonstanten.
Setzen wir die obere in die untere Gleichung, ergibt sich

(11) $$x_1 = 1/2\ x_2^2 + c.$$

Für das Intervall, in dem $Z = -1$ ist, erhalten wir entsprechend

$$x_2 = -t + c_2' \text{ und}$$

$$x_1 = -\ t^2/2 + c_2' t + c_1' = -\ 1/2(-t + c_2') + (c_1' + c_2'^2/2),$$

Dies ergibt zwischen x_1 und x_2 den Zusammenhang

$$x_1 = -1/2\, x_2^2 + c'. \tag{12}$$

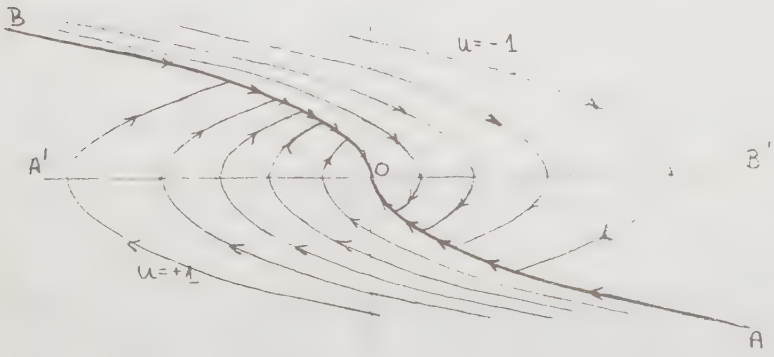
Zeichnen wir die Schar der Parabeln $x_1 = 1/2\, x_2^2 + c$ und denken dabei an die Parametrisierung durch t, so sehen wir, wie sich der Phasenpunkt (x_1, x_2) auf diesen Kurven bewegt.

Ebenso können wir uns die Parabeln (12) veranschaulichen.

Nun wollen wir die ganze Schar der sich auf diese Weise ergebenden Phasentrajektorien darstellen.

AO ist der Teil der Parabel $x_1 = 1/2\, x_2^2$, der in der Halbebene $x_2 \leq 0$ liegt. BO ist der Bogen von $x_1 = 1/2\, x_2^2$, der in der oberen Halbebene liegt. Liegt der Anfangspunkt $x_o = x(0) = (x_{1o}, x_{2o})$ oberhalb der Kurve AOB, so bewegt sich der Phasenpunkt x zuerst auf dem durch x_o laufenden Bogen einer durch $x_1 = -1/2\, x_2^2 + c'$ beschriebenen Parabel. Der Phasenpunkt bewegt sich auf dieser Parabel unter dem Einfluß der Steuerung $Z(t,x) = -1$ so lange, bis er auf den

Bogen AO trifft. Von dort aus bewegt sich der Punkt x denn unter dem Einfluß der Kontrollfunktion $Z(t,x) = 1$ bis zum Eintreffen in dem Koordinatenursprung (0,0). Liegt der Anfangspunkt unterhalb der Linie AOB, so bewegt sich x zuerst auf einer Parabel $x_1 = 1/2\ x_2^2 + c$ durch den Anfangspunkt. Dies geschieht so lange, bis diese Parabel dann $-1/2\ x_2^2$ schneidet. Dort springt dann die Steuerung von $Z(t,x) = +1$ auf -1 um. Unter dem Einfluß dieser Kontrolle bewegt sich x dann hin zum Koordinatenursprung (0,0).



Nach dieser Analyse können wir mit der Berechnung der Wertfunktion $W(t_o, x_o) = T(x_o)$ beginnen. Dabei ist $T(x_o)$ die Zeit, in der der Punkt x mit $x(0) = x_o$ bei optimaler Kontrolle den Punkt (0,0) erreicht.

Wir wollen die Wertfunktion nur in der unteren Halbebene $x_2 \leq 0$ berechnen, da dies für unsere Zwecke ausreicht.

Sei zuerst $x_o = (x_{1o}, x_{2o})$ ein Punkt aus dem Inneren des von A'OA begrenzten Gebietes. Bestimmen wir die Parabel $x_1 = 1/2\ x_2^2 + c$, die durch x_o hindurchgeht:

$$x_{1o} = + 1/2\ x_{2o}^2 + c,$$

Daraus ergibt sich c als

$$c = x_{1o} - 1/2\ x_{2o}^2 .$$

Dann berechnen wir die Zeit, die x bis zum Schnittpunkt dieser Parabel mit der Achse $x_2 = 0$ braucht. Das Intervall zwischen x_{1o} und $x_{1o} - 1/2\ x_{2o}^2$ hat die Länge $1/2\ x_{2o}^2$. Für die Zeit t ergibt sich

$$1/2\ x_{2o}^2 = 1/2\ t^2 + x_{2o} t ;$$

daraus folgt

$$t = - x_{2o} + 1/2 \sqrt{4x_{2o}^2 - 4x_{2o}^2} = - x_{2o} ;$$

x_{2o} ist ja negativ und die Zeit, die der Punkt zum Durchlaufen dieser Strecke braucht, ist positiv.

Als zweites betrachten wir das Stück von (c,0) bis zum Schnittpunkt mit der Parabel

$$x_1 = - 1/2\ x_2^2 .$$

Dieser Schnittpunkt ergibt sich mit

$$x_1 = - 1/2\ x_2^2 \ ,$$

$$x_1 = 1/2\ x_2^2 + x_{1o} - 1/2\ s_{2o}^2 \ ,$$

als

$$\bar{x}_2^2 = 1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o} \ ,$$

$$\bar{x}_1 = - 1/2(1/2\ x_{2o} - x_{1o}) = 1/2\ c \ .$$

Für ein Intervall der Länge - 1/2 c erhalten wir für t mit den Anfangsbedingungen $x_1 = c$, $x_2 = 0$:

$$1/2(1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}) = 1/2\ t^2 \ .$$

Daraus ergibt sich

$$t = + \sqrt{1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}} \ .$$

Für den dritten Teil des Weges, nämlich von dem Schnittpunkt der beiden Parabeln bis zum Ursprung gilt offensichtlich aus Symmetriegründen

$$t = + \sqrt{1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}} \ .$$

Damit ergibt sich für das durch A'OA berandete Gebiet die Wertfunktion T als Summe der berechneten Zeiten

$$(13) \qquad T(x_o) = - x_{2o} + 2 \sqrt{1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}} \ .$$

Nun berechnen wir die Wertfunktion für Anfangspunkte aus dem Inneren des durch B'OA berandeten Gebietes. Dort läuft der Punkt x zuerst auf einer Parabel $x_1 = - 1/2\ x_2^2 + c'$. Geben wir $x_o = (x_{1o}, x_{2o})$ vor, so wird

$$c' = x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2 .$$

Dieser Weg muß nur in zwei Teile zerlegt werden, erstens bis zum Schnittpunkt der beiden Parabeln und dann bis zum Ursprung.

Für den Schnittpunkt $\bar{x}$ ergeben sich aus

$$x_1 = 1/2\ x_2^2,$$

$$x_1 = - 1/2\ x_2^2 + x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2,$$

die Koordinaten

$$\bar{x}_2^2 = x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2, \qquad \bar{x}^2 = - x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2,$$

$$\bar{x}^1 = 1/2(x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2).$$

Die für den ersten Teil des Weges gebrauchte Zeit berechnet sich aus

$$t^2/2 - x_{2o}t = 1/2(x_{1o} - 1/2\ x_{2o}^2)$$

als

$$t = x_{2o} + 1/2\sqrt{4x_{2o}^2 + 4x_{1o} - 2x_{2o}^2} =$$

$$= x_{2o} + \sqrt{x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2}\ .$$

Die Zeit für das zweite Wegstück ergibt sich wie die für das dritte Wegstück bei der vorhergehenden Betrachtung als

$$t = \sqrt{1/2\ x_{2o}^2 + x_{1o}}\ .$$

T ist für Anfangspunkte aus dem durch B'OA berandeten Gebiet

$$(14) \qquad T(x_o) = x_{2o} + 2\sqrt{x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2}\ ,$$

Setzen wir nun die Wertfunktion für die gesamte untere Halbebene aus (13) und (14) zusammen, so ist dies auf A offenbar stetig. Dies sieht man durch Einsetzen eines Punktes (x_{1o}, x_{2o}), für den $x_{1o} = -1/2\ x_{2o}$ gilt.
Das zusammengesetzte T ist aber nicht stetig partiell differenzierbar.

Leiten wir (13) nach x_{1o} und x_{2o} ab:

$$(15) \qquad \frac{\partial T}{\partial x_{1o}} = \frac{1}{\sqrt{1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}}} \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_{2o}} = -1 + \frac{x_{2o}}{\sqrt{1/2\ x_{2o}^2 - x_{1o}}}\ .$$

Dasselbe für (14) ergibt

$$(16) \qquad \frac{\partial T}{\partial x_{1o}} = \frac{1}{\sqrt{x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2}} \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_{2o}} = 1 + \frac{x_{2o}}{\sqrt{x_{1o} + 1/2\ x_{2o}^2}} \quad .$$

Geht man durch Grenzübergang zu Punkten der Parabel $-x_1 = 1/2\ x_2^2$ über, so wird (15) singulär, während (16) für $(x_{1o}, x_{2o}) \neq (0,0)$ endlich bleibt. Damit haben wir ein Beispiel mit einer nicht stetig differenzierbaren Wertfunktion untersucht.

2.3 Die Gleichung von R. Isaacs

In diesem Abschnitt werden wir Gleichung (7) beweisen und zugleich die Minimax-Annahme von Isaacs als Teil dieses Satzes erhalten. Dazu müssen wir uns wieder der Wertfunktion zuwenden. Diese ist für Punkte (t_o, x_o) aus $\tilde{R}_{ij}$ für $1 \leq j \leq j_1$ durch

$$(17) \qquad W(t_o, x_o) = (t_{ij_i}, x_{ij_i}) + \int_{t_o}^{t_{ij}} \bar{f}\, dt + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}} \bar{f}\, dt$$

gegeben. $\bar{f}$ ist eine Abkürzung für

$$\bar{f} = f(t, \phi^*(t, t_o, x_o), Y^*(t, t_o, x_o)), Z^*(t, t_o, x_o))).$$

Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von h und g und 1.3 Satz 3 folgt für die Darstellung (17) von $W(t_o, x_o)$, daß W_{t_o} und W_{x_o} existieren und auf R_{ij} stetig sind. Bildet man Grenzwerte aus dem Inneren von R_{ij}, falls (t_o, x_o) zu M_{ij} oder $M_{i,j-1}$ gehören, so existieren die zugehörigen Werte von W_{t_o} und W_{x_o} und ergeben eine stetige Fortsetzung der Funktionen auf $\tilde{R}_{ij}$.

Nun zu dem lange angekündigten Satz von Isaacs, den wir nachher als Satz 1^* noch einmal spieltheoretisch formulieren werden:

Satz 1 Sei (t_o, x_o) aus R_{ij}; dann gilt (unter den Annahmen von Kapitel 1):

$$\max_{y}\min_{z}\,(f + W_{x_o}\cdot g) = \min_{z}\max_{y}\,(f + W_{x_o}\cdot g) =$$

(18) $$f(t_o, x_o, y^*, z^*) + W_{x_o}\cdot g(t_o, x_o, y^*, z^*) =$$

$$= - W_{t_o}(t_o, x_o),$$

Dabei ist

y aus $\{ y: y = Y(t_o, x_o)$ und $Y \in \mathfrak{Y}_1 \}$ und

z aus $\{z: z = Z(t_o, x_o)$ und $Z \in \mathfrak{Z}_1\}$;

f und g sind in der ersten Zeile der Gleichung an der Stelle (t_o, x_o, y, z) zu nehmen.

Beweis:

Die Idee des Beweises ist wieder der Grundsatz vom Übergang. Sei (t_o, x_o) aus R_{ij} und $Z(t,x)$ eine Kontrollfunktion aus $\mathfrak{Z}_1$, dann gibt es eine abgeschlosses Umgebung von (t_o, x_o), genannt $N(t_o, x_o)$, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $N(t_o, x_o) \subset R_{ij}$.

(b) Es existiert ein $\gamma > 0$ so, daß $t_o \leq t \leq t_o +$ in der Projektion von $N(t_o, x_o)$ auf die t-Achse enthalten ist.

(c) Die Funktion

$$\tilde{Z}(t,x) := \begin{cases} Z^+(t,x) \text{ für } (t,x) \notin N(t_o, x_o) \\ Z\ (t,x) \text{ für } (t,x) \in N(t_o, x_o) \end{cases}$$

gehört zu $\mathfrak{Z}_1$.

Eigenschaften (a) und (b) sind einfach zu erfüllen, lediglich bei (c) muß man daran denken, daß die Menge der zulässigen z-Werte abgeschlossen und beschränkt ist.

Sei $\Psi(t)$ der Pfad, der bei (t_o, x_o) beginnt und bei Anwendung der Kontrollfunktion $(Y^*, \tilde{Z})$ eintritt. Weiter sei $t_o+\delta$ die Zeit, zu der der Pfad $N(t_o, x_o)$ wieder verläßt. Aus der Definition von $\tilde{Z}$ folgt dann

$$\Psi(t) = \phi^*(t,\ t_o + \delta,\ x(t_o + \delta)) \qquad \text{für } t \geq t_o + \delta \ .$$

Da (Y^*, Z^*) nach Voraussetzung ein Sattelpunkt ist, gilt für die Wertfunktion folgende Abschätzung, wenn wir die Kontrollfunktion $\tilde{Z}$ benutzen.

$$\begin{aligned}
W(t_o, x_o) &= P(t_o, x_o, Y^*, Z^*) \leq P(t_o, x_o, Y^*, \tilde{Z}) = \\
&= h(t_e, x_e) + \int_{t_o}^{t_o+\delta} f(t, \Psi(t), Y^*(t, \Psi(t)), Z(t, \Psi(t)))dt + \\
&\quad + \int_{t_o+\delta}^{t_e} f(t, \Psi(t), Y^*(t, \Psi(t)), Z^*(t, \Psi(t)))\ dt = \\
&= h(t_e, x_e) + \int_{t_o}^{t_o+\delta} f(t, \Psi(t), Y^*(t, \Psi(t)), Z(t, \Psi(t)))dt + \\
&\quad + \int_{t_o+\delta}^{t_e} f(t, \phi^*(t, t_o + \delta, x(t_o + \delta)), Y^*(t, \phi^*), \\
&\qquad\qquad Z^*(t, \phi^*))\ dt = \\
&= \int_{t_o}^{t_o+\delta} f(t, \Psi(t), Y^*(t, \Psi(t)), Z(t, \Psi(t)))\ dt + \\
&\quad + W(t_o + \delta, \Psi(t_o + \delta)) .
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$(19) \qquad -W(t_o+\delta, \Psi(t_o+\delta)) + W(t_o, x_o) \leq \int_{t_o}^{t_o+\delta} f(t, \Psi(t), Y^*, Z)\, dt.$$

Setzen wir in obiger Abschätzung $Z = Z^*$, so gilt das Gleichheitszeichen.

Lassen wir nun die Umgebung $N(t_o, x_o)$ von (t_o, x_o) auf (t_o, x_o) zusammenschrumpfen, so gilt offenbar, daß dabei δ gegen Null geht.

Da für (t_o, x_o) aus R_{ij} die Ableitungen W_{t_o} und W_{x_o} stetig sind, können wir auf die linke Seite von (19) den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden und erhalten

$$-W_{t_o}(t_o, x_o)\cdot\delta - W_{x_o}(t_o, x_o)(\Psi(t_o+\delta) - x_o) + o(1)\delta + o(1)(\Psi(t_o+\delta) - x_o).$$

Da wir für

$$\begin{aligned}\Psi(t_o+\delta) - x_o &= \Psi(t_o+\delta) - \Psi(t_o)\\ &= (\Psi'(t_o) + o(1))\delta\\ &= (g(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z(t_o, x_o)) + o(1))\cdot\delta\end{aligned}$$

schreiben können, läßt sich die linke Seite von (19) weiter umformen

$$-(W_{t_o}(t_o, x_o) + W_{x_o}(t_o, x_o)\cdot g(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z(t_o, x_o)))\delta + o(\delta).$$

Die rechte Seite von (19) kann als

$$(f(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z(t_o, x_o)) + o(1)) \cdot \delta$$

entwickelt werden.

Nach diesen Umformungen teilen wir (3) durch $\delta > 0$ und lassen dann $N(t_o, x_o)$ auf (t_o, x_o) zusammenschrumpfen. Wir erhalten

$$(20) \quad -W_{t_o}(t_o, x_o) \leqslant f(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z(t_o, x_o) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z(t_o, x_o))$$

Nun können wir darin für $Z(t_o, x_o) = z$ setzen. (20) gilt dann für alle z mit $z = Z(t_o, x_o)$ für Z aus $\mathfrak{Z}_1$. Da für $Z = Z^*$ in (19) das Gleichheitszeichen gilt, können wir die Abschätzung (20) folgendermaßen angeben

$$(21) \quad f(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), z) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), z) - W_{t_o}(t_o, x_o) =$$

$$= f(t_o, x_o, y^*, z^*) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, y^*, z^*).$$

Dabei haben wir $y^* = Y^*(t_o, x_o)$ und $z^* = Z^*(t_o, x_o)$ gesetzt.

Dieselben Argumente können wir benutzen, um nun Strategien Y aus $\mathfrak{M}_1$ gegen Z^* zu spielen. Wir konstruieren

wieder eine Umgebung $N'(t_o, x_o)$ von (t_o, x_o), nur diesmal für die Y-Kontrollfunktionen und führen dann wieder den Grenzübergang aus. Dies ergibt, da

$$W(t_o, x_o) = P(t_o, x_o, Y^*, Z^*) \geqslant P(t_o, x_o, \overline{Y}, Z^*)$$

die Ungleichung

$$(22) \quad - W_{t_o}(t_o, x_o) \geqslant f(t_o, x_o, y, Z^*(t_o, x_o)) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, y, Z^*(t_o, x_o))$$

für y mit $y = Y(t_o, x_o)$ mit Y aus $\mathfrak{M}_1$. Setzen wir (21) und (22) zusammen, so folgt

$$(23) \quad \begin{aligned} & f(t_o, x_o, y, z^*) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, y, z^*) \leqslant \\ & \leqslant f(t_o, x_o, y^*, z^*) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, y^*, z^*) = \\ & = - W_{t_o}(t_o, x_o) \leqslant \\ & \leqslant f(t_o, x_o, y^+, z) + W_{x_o}(t_o, x_o) \cdot g(t_o, x_o, y^+, z). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Minimax-Gleichung (18).
Damit ist Satz 1 bewiesen.

Jetzt wollen wir Satz 1 noch einmal spieltheoretisch formulieren. Dazu definieren wir für (t_o, x_o) aus R_{ij} ein Spiel $\Gamma = \Gamma(t_o, x_o)$, das von den Parametern (t_o, x_o) abhängt.

Die zulässigen Strategien sind für Spieler I alle

Vektoren y mit $Y = Y(t_o, x_o)$ für Y aus $\mathcal{Y}_1$. Diese Menge ist nach den Voraussetzungen des Kap. 1 kompakt und konvex. Für Spieler II sind die zulässigen Strategien alle Vektoren z, so daß $z = Z(t_o, x_o)$ und Z aus $\mathcal{Z}_1$ ist. Auch diese zulässige z-Menge ist kompakt und konvex.

Als Auszahlfunktion definieren wir

$$P_\Gamma = f(t_o, x_o, y, z) + W_{x_o}(t_o, x_o, y, z) \cdot g .$$

Mit Hilfe des oben formulierten Spieles läßt sich Satz 1 folgendermaßen darstellen

Satz 1* Für (t_o, x_o) aus R_{ij} besitzt das Spiel $\Gamma(t_o, x_o)$ eine Lösung $(y^*, z^*) = (Y^*(t_o, x_o), Z^*(t_o, x_o))$. Der Wert des Spieles ist $- W_{t_o}(t_o, x_o)$.

Im Beweis zu Satz 1 setzten wir (t_o, x_o) aus R_{ij} voraus. Nun wollen wir diese Ergebnisse auf $\tilde{R}_{ij}$ ausdehnen. Ist (t_o, x_o) ein Punkt von M_{ij}, dann gelten (18) und (23) wegen der stetigen Fortsetzbarkeit der Kontrollfunktionen mit

$$(y^*, z^*) = (Y^*_{ij}(t_o, x_o), Z^*_{ij}(t_o, x_o))$$

Für die Ableitungen von $W(t_o, x_o)$ ist

$$W_{t_o}(t_o, x_o) = \bar{W}_{t_o}(t_o, x_o) = \lim_{(t,x) \to (t_o, x_o)} W_t(t,x)$$

und

$$W_{x_o}(t_o, x_o) = \overline{W}_{x_o}(t_o, x_o) = \lim_{(t,x) \to (t_o, x_o)} W_x(t,x)$$

zu nehmen. Die Grenzwerte auf der rechten Seite sind aus dem Inneren von R_{ij} gegen (t_o, x_o) zu bilden. Für k mit $j \leq k < j_i$ gilt (18) und (19) mit denselben Argumenten. (y^*, z^*) sind dann als $(Y^*_{i,k+1}(t_o, x_o), Z^*_{i,k+1}(t_o, x_o))$ zu wählen. Die Grenzwerte von rechts nennen wir $W^+_{t_o}$ und $W^+_{x_o}$.

Definieren wir:

$$H(t, x, y, z, \lambda) := f(t, x, y, z) + \lambda g(t, x, y, z),$$

dann können wir den zweiten Teil der Gleichung (21) mit Hilfe von H ausdrücken:

(24) $$H(t_o, x_o, Y^*(t_o, x_o), Z^*(t_o, x_o), W_{x_o}(t_o, x_o)) + W_{t_o}(t_o, x_o) = 0.$$

Zusammen mit den vorhergehenden Überlegungen erhalten wir sofort Satz 2:

Satz 2 Die Wertfunktion $W(t_o, x_o)$ genügt auf R der Hamilton-Jacobi-Gleichung (24). Auf Unstetigkeitsmannigfaltigkeiten haben Y^*, Z^*, W_{t_o}, W_{x_o} die obige Interpretation.

Als nächstes werden wir uns mit den Differenzier-

barkeitseigenschaften der Wertfunktion auf den Mannigfaltigkeiten M_{ij} befassen.

Dazu bemerken wir zuerst noch, daß $W(t,x)$ auf R stetig ist. Das folgt, da h aus $C^{(1)}$ ist und den Stetigkeitseigenschaften des Pfades. In den folgenden Ausführungen werden wir die Sattelpunktbedingungen, insbesondere 1.1.11(c) wesentlich ausnützen. Danach dürfen optimale Pfade nicht zu Mannigfaltigkeiten M_{ij} tangential sein.

Satz 3 Ist M_{ij} Unstetigkeitsmannigfaltigkeit nur einer der Funktionen Y^* oder Z^*, dann sind auf M_{ij} die Funktionen W_{t_o} und W_{x_o} stetig.

Beweis:

Sei (t_o, x_o) aus M_{ij}.
Mit Hilfe eines Parameters $\bar{s}$ wollen wir eine einmal stetig differenzierbare Kurve auf M_{ij} definieren. ($\bar{s}$ hat nichts mit dem Vektor s zu tun, mit dem M_{ij} parametrisiert ist.)

$$t = t(\bar{s}) \quad ; \quad x = x(\bar{s})$$

auf M_{ij}. Für $\bar{s}$ gelte $-1 \leq \bar{s} \leq 1$ und für $\bar{s} = 0$ gelte

$$x(0) = x_o \quad ; \quad t(0) = t_o$$

Wir betrachten nun

$$w(\bar{s}) = W(t(\bar{s}),\ x(\bar{s})).$$

Da M_{ij} eine stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und da W_t^+, W_x^+ und W auf $R_{i,j+1}$ stetig sind, gibt es eine $C^{(1)}$ Funktion V, die in einer Umgebung N von $(t_o,\ x_o)$ definiert ist, so daß für $(t_o,\ x_o)$ aus $R_{i,j+1} \cap N$ die beiden Funktionen übereinstimmen; $V(t,x) = W(t,x)$. Deshalb gilt auch

$$w(\bar{s}) = W(t(\bar{s}),\ x(\bar{s})) = V(t(\bar{s}),\ x(\bar{s}))$$

Damit existiert auch w' und

$$w'(0) = V_t(t_o,\ x_o)\ t'(0) + V_x(to,\ x_o)\ x'(0) =$$

$$= W_t^+(t_o,\ x_o)\ t'(0) + W_x^+(t_o,\ x_o)\ x'(0).$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir, wenn wir das Gebiet $\tilde{R}_{ij}$, das ja auch M_{ij} enthält, betrachten

$$w'(0) = W_t^-(t_o,\ x_o)\ t'(0) + W_x^-(t_o,\ x_o)\ x'(0).$$

Fassen wir die beiden Resultate für $w'(0)$ zusammen, so ergibt sich

$$(W_t^+ - W_t^-)\ t'(0) + (W_x^+ - W_x^-)\ x'(0) = 0.$$

Da wir eine beliebige $C^{(1)}$ - Kurve auf der n-dimensionalen

Mannigfaltigkeit M_{ij} vorgegeben hatten, folgt, daß entweder

$$(25) \qquad W_t^+ = W_t^- \qquad \text{und} \qquad W_x^+ = W_x^-$$

oder daß

$$(26) \qquad (W_t^+ - W_t^-,\ W_x^+ - W_x^-) \neq (0,0)$$

und an der Stelle (t_o, x_o) orthogonal zu M_{ij} ist. (25) ergibt die Behauptung des Satzes. Wenn wir zeigen können, daß (26) nicht eintreten kann, ist Satz 3 bewiesen.

Dazu benötigen wir, wie schon oft, die Funktionen Z^*_{ij} und $Z^*_{i,j+1}$, die stetig differenzierbare Fortsetzungen von Z^* sind.

Definieren wir nun wie im Beweis zu Satz 1 in einer Umgebung von (t_o, x_o) eine Kontrollfunktion Z^+ als Z^*_{ij} in dieser Umgebung von (t_o, x_o) und Z^* sonst, so daß Z^+ auch wieder zu $\mathfrak{Z}_1$ gehört. An der Stelle (t_o, x_o) gilt

$$Z^+(t_o, x_o) = Z^*_{ij}(t_o, x_o).$$

Ebenso läßt sich eine Kontrollfunktion Z^- definieren, indem Z^* in einer Umgebung von (t_o, x_o) durch Z^*_{ij} ersetzt wird. Z^- gehört auch zu $\mathfrak{Z}_1$.

$$Z^-(t_o, x_o) = Z^*_{ij}(t_o, x_o).$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß M_{ij} eine

Unstetigkeitsmannigfaltigkeit von Z^* ist. Dann ist unter den gegebenen Voraussetzungen M_{ij} keine Mannigfaltigkeit eines Sprunges von Y^*. Deshalb gilt

$$Y^*(t_o, x_o) = Y^*_{ij}(t_o, x_o) = Y^*_{i,j+1}(t_o, x_o).$$

Setzen wir $z^- = Z^-(t_o, x_o)$ und analog für die anderen Kontrollfunktionen. Aus den Bemerkungen, die sich Satz 1^* anschließen, und aus (21) folgt

$$\begin{aligned} -W_t^+ &= f^+ + W_x^+ \cdot g^+ \leqslant \\ &\leqslant f(t_o, x_o, y^*, z^-) + W_x(t_o, x_o)\, g(t_o, x_o, y^*, z^-) = \\ &= f^- + W_x^+ G^- \end{aligned} \tag{27}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, da ja

$$z^- = Z^-(t_o, x_o) = Z^*_{ij}(t_o, x_o) = z^{*-}$$

ist. Die Zeichen $\overset{+}{-}$ stehen für die Stelle $(t_o, x_o, y^*, z^{\overset{+}{-}})$, an der die Funktionen f und g genommen werden. Mit denselben Methoden, die zu (27) führten, erhalten wir auch

$$\begin{aligned} -W_t^- &= f^- + W_x^- G^- \leqslant \\ &\leqslant f(t_o, x_o, y^+, z^+) + W_x(t_o, x_o)\, g(t_o, x_o, y^*, z^+) = \\ &= f^+ + W_x^- \cdot g^+ \end{aligned} \tag{28}$$

Aus (27) und (28) folgt sofort

$$(29)\qquad W_t^+ - W_t^- = - f^+ - W_x^+ g^+ + f^- + W_x^- g^- \leq$$

$$\leq - f^+ - W_x^+ g^+ + f^+ + W_x^- g^+ = -(W_x^+ - W_t^-) g^+.$$

Da $W_t^+ \geq f^- + W_x^+ g^-$ ist ergibt sich andererseits

$$(30)\qquad W_t^+ - W_t^- = - f^+ - W_x^+ g^+ + f^- + W_x^- g^- \geq$$

$$\geq - f^- - W_x^+ g^- + f^- + W_x^- g^- =$$

$$= - (W_x^+ - W_x^-) g^-.$$

Aus (29) und (30) folgt

$$(31)\qquad (W_t^+ - W_t^-) + (W_x^+ - W_x^-) g^+ \leq 0 \text{ und}$$

$$(32)\qquad (W_t^+ - W_t^-) + (W_x^+ - W_x^-) g^- \geq 0.$$

Unter der Annahme, daß $(W_t^+ - W_t^-, W_x^+ - W_x^-)$ ungleich dem Nullvektor und orthogonal zu M_{ij} ist, müssen die Ungleichungen (31) und (32) strikt gelten.

Wäre zum Beispiel

$$(W_t^+ - W_t^-) + (W_x^+ - W_x^-) g^- = 0,$$

so würde das bedeuten, daß der Vektor

$$(1, g^-) = (1, \phi^{*'}(t_{ij} - 0, t_o, x_o))$$

orthogonal zu $(W_t^+ - W_t^-, W_x^+ - W_x^-)$ stünde. Da dieser aber

orthogonal zu M_{ij} ist, folgt daraus, $(1, \phi^{*'}(t_{ij} - 0, t_o, x_o))$ liegt in einer Tangentialebene zu M_{ij}. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung über Sattelpunkte. Deshalb gilt die Ungleichung in (31) und (32) strikt. Daraus folgt aber, daß die beiden Tangentenvektoren

$$(1, \phi^{*'}(t_{ij}-0, t_o, x_o)) \text{ und } (1, \phi^{*'}(t_{ij}+0, t_o, x_o))$$

in die zwei verschiedenen Halbräume der Tangentialebene von M_{ij} im Punkte (t_o, x_o) gerichtet sind. Dies ist aber unmöglich. Damit ist Satz 3 bewiesen.

3 Die Multiplikatormethode

3.1 Die Existenz des Multiplikators

Dieses Kapitel dient der Untersuchung der charakteristischen Gleichungen der Hamilton-Jacobi-Gleichung von 2, Satz 2.

Setzen wir zur Abkürzung der Schreibweise wieder

$$\bar{f} = f(t, \phi^*(t, t_o, x_o), Y^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o)), Z^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o)))$$

und

$$\begin{aligned} \bar{Y}_x^* &= Y_x^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o)), \\ \bar{Z}_x^* &= Z_x^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o)), \end{aligned} \tag{1}$$

Dann können wir die Ableitung der Wertfunktion für (t_o, x_o) aus R_{ij}:

$$W(t_o, x_o) = h(t_e, x_e) + \Big(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i - 1} \int_{t_{i,k}}^{t_{i,k+1}} \Big) \bar{f}\, dt$$

nach x_o kurz darstellen.

Berechnen wir zuerst die Ableitung von h nach x_o

$$h_{x_o}(t_{ij_i}, x_{ij_i}) = \frac{\partial h}{\partial t}(t_{ij_i}, x_{ij_i}) \frac{\partial t_{ij_i}}{\partial x_o} + \frac{\partial h}{\partial x}(t_{ij_i}, x_{ij_i}) \frac{\partial x_{ij_i}}{\partial x_o}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial t}(t_{ij_i}, x_{ij_i}) \frac{\partial T_{ij_i}(s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_o} + \frac{\partial h}{\partial x_o}(t_{ij_i}, x_{ij_i}) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \lambda_{ij_i}}{\partial x_o} \frac{\partial s}{\partial x_o}$$

$$= h_s \frac{\partial s}{\partial x_o} ,$$

da $t_{ij_i}(t_o, x_o) = T_{ij_i}(s)$.

Auch die Integrale im Ausdruck für W lassen sich mit den üblichen Regeln ableiten, wenn man beachtet, daß auch die Grenzen von x_o abhängen.

Dabei ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_o} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}} f(t, \phi^*(t, t_o, x_o), Y^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o)), Z^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o))) \, dt$$

$$= \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}} (\bar{f}_x \phi^*_{x_o} + \bar{f}_y \bar{Y}^*_x \phi^*_{x_o} + \bar{f}_z \bar{Z}^*_x \phi^*_{x_o}) \, dt +$$

$$+ \frac{\partial t_{i,k+1}}{\partial x_o} f(t_{i,k+1}, \phi^*(t_{i,k+1}, t_o, x_o), Y^*_{i,k+1}(t_{i,k+1}, \phi^*(t_{i,k+1}, t_o, x_o)), Z^*_{i,k+1}(t_{i,k+1}, \phi^*(t_{i,k+1}, t_o, x_o))) -$$

$$- \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} f(t_{ik}, \phi^*(t_{ik}, t_o, x_o), Y^*_{i,k+1}(t_{ik}, \phi^*(t_{ik}, t_o, x_o)), Z^*_{i,k+1}(t_{ik}, \phi^*(t_{ik}, t_o, x_o))) =$$

und nach 1.3 Satz 4 kürzer

$$= \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}} (\bar{f}_x + \bar{f}_y Y^*_x + \bar{f}_z Z^*_x) \phi^*_{x_o} \, dt +$$

$$+ \frac{\partial t_{i,k+1}}{\partial x_o} f(P^-_{i,k+1}) - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} f(P^+_{ik})$$

Für $W_{x_o}(t_o, x_o)$ erhalten wir nach Umstellen einiger Glieder den Ausdruck

$$w_{x_o}(t_o, x_o) = h_s \frac{\partial s}{\partial x_o} + f(P_{ij_i}) \frac{\partial t_{ij_i}}{\partial x_o} +$$

$$+ \sum_{k=j}^{j_i - 1} (f(P_{ik}^-) - f(P_{ik}^+)) \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o}$$

$$+ \left(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i - 1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}} \right) (\bar{f}_x + \bar{f}_y Y_x^* + \bar{f}_z Z_x^*) \phi_{x_o}^* \, dt$$

Formel (3) werden wir mit dem jetzt einzuführenden Multiplikator λ weiter umformen und vereinfachen. Im Laufe dieser Rechnung werden wir auch die Traversalitätsbedingungen für den Endpunkt des optimalen Pfades erhalten. Allerdings sind sie formal nicht so einfach wie beim Pontrjaginschen Prinzip.

<u>Satz 1</u> Es gibt eine Funktion $\lambda(t, t_o, x_o)$, definiert für (t_o, x_o) aus R_{ij} und $t_{i,j-1} \leq t \leq t_{ij_i}$, so daß für für $t \neq t_{ik}$ mit $k = j, \ldots, j_i$ gilt:

(a) auf $[t_{i,k-1}, t_{ik}]$ mit $k = j, \ldots, j_i$ existiert λ' und erfüllt die Differentialgleichung

(4) $$\lambda' = -(\bar{H}_x + \bar{H}_y \bar{Y}_x^* + \bar{H}_z \bar{Z}_x^*),$$

wobei die Ableitungen an den Endpunkten aus dem Inneren des Zeitintervalls zu bilden sind.

(b) $\lambda(t, t_o, x_o)$ ist stetig in (t_o, x_o) für (t_o, x_o) aus R_{ij}.

(c) Wenn $t \to t_{ij_i}$, so ist

$$\lambda_{ij_i} = \lambda(t_{ij_i},\ t_o,\ x_o)$$

eindeutig bestimmt.

Geht t gegen $t_{ik} + 0$ und t gegen $t_{ik} - 0$, so hat λ eindeutige einseitige Grenzwerte

$$\lambda^- = \lambda(t_{ik} - 0\ t_o,\ x_o) \text{ und } \quad \lambda^+ = \lambda(t_{ik} + 0,\ t_o, x_o)$$

für $k = j, \ldots, j_i - 1$.

(d) Die Werte von λ^+ und λ^- an den Stellen t_{ik} für $k = j, \ldots, j_i - 1$ bestimmen sich aus

$$(5) \qquad H(P^-_{ik}, \lambda^-_k)\ \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} - \lambda^-_k\ \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_o} =$$

$$= H(P^+_{ik}, \lambda^+_k)\ \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} - \lambda^+_k\ \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_o}\ .$$

Dabei ist die Ableitung der Hamilton-Funktion H in (4) an der Stelle $(t, \phi^*(t, t_o, x_o), \overline{Y}^*, \overline{Z}^*, \lambda)$ zu nehmen. Dies ist ein lineares System in λ.

Beweis:

Die Konstruktion von λ erfolgt rückwärts. Wir werden also vom Zustand des Spieles auf der Endfläche ausgehen. Von hier erhalten wir Anfangsbedingungen für das lineare System (4).

Betrachten wir das folgende Gleichungssystem von n linearen Gleichungen in n Unbekannten auf E_1

$$(6) \qquad h_s + f(P_{ij_i}) \frac{\partial T_{ij_i}}{\partial s} + \lambda_{j_i} \left(g(P_{ij_i}) \frac{\partial T_{ij_i}}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ij_i}}{\partial s} \right) = 0,$$

h_s wird wie in (2) genommen, und $\frac{\partial T_{ij}}{\partial s}$ und $\frac{\partial \chi_{ij}}{\partial s}$ werden an dem Parameterwert s entwickelt, der zu dem Wert $(t_{ij_i}(t_o, x_o), x_{ij_i}(t_o, x_o))$ gehört, an dem der optimale Pfad auf E_i endet, der von (t_o, x_o) ausgeht.

Da ja $g(P_{ij_i}) = \phi^{*'}(t_{ij_i} - 0, t_o, x_o)$ ist, können wir 1.3 Satz 2^* auf (6) anwenden. Danach ist die Matrix bei λ_{j_i} nicht singulär. λ_{j_i} läßt sich also eindeutig aus (6) berechnen. Wegen der $C^{(1)}$-Eigenschaft aller verwendeten Funktionen in R_{ij} folgt dann die Stetigkeit von (t_{ij_i}, t_o, x_o) in (t_o, x_o). Damit ist der erste Teil der Aussage (c) bewiesen.

Nach Definition von H gilt:

$$H(P_{ij_i}, \lambda_{j_i}) = f(P_{ij_i}) + \lambda_{j_i} g(P_{ij_i}).$$

Damit läßt sich (6) etwas kürzer als

$$(7) \qquad h_s + H \frac{\partial T_{ij}}{\partial s} - \lambda_{j_i} \frac{\partial \chi_{ij_i}}{\partial s} = 0$$

schreiben.

Multiplizieren wir dies von rechts mit $\frac{\partial s}{\partial x_o}$ und erinnern uns an die Kettenregel in Satz 2^*, folgt die Traversalitätsbedingung am rechten Endpunkt:

$$(8) \qquad h_s \frac{\partial s}{\partial x_o} + H \frac{\partial t_{ij_i}}{\partial x_o} - \lambda_{j_i} \frac{\partial x_{ij_i}}{\partial x_o} = 0.$$

Betrachten wir nun die Differentialgleichung (4)

$$-\lambda' = \overline{H}_x + \overline{H}_y \overline{Y}_x^* + \overline{H}_z \overline{Z}_x^*$$

mit der Anfangsbedingung (es ist in diesem Fall eine Bedingung für den Endpunkt)

$$(9) \qquad \lambda(t_{ij_i}) = \lambda_{j_i}.$$

Das System (4) kann auch ohne Verwendung von H geschrieben werden. Dann ist die Linearität in λ offensichtlich.

$$-\lambda' = f_x + f_y + f_z + \lambda(g_x + g_y \overline{Y}_x^* + g_z \overline{Z}_x^*).$$

Da das System für λ linear ist, gibt es genau eine Lösung im Intervall t_{ij_i-1}, t_{ij_i}, die die Anfangsbedingung (9) erfüllt:

$$\lambda = \lambda(t, t_{ij_i}, \lambda_{j_i}).$$

Da t_{ij_i} und λ_{j_i} stetig von (t_o, x_o) abhängen, können wir auch

$$\lambda(t, t_{ij_i}, \lambda_{j_i}) = \lambda(t, t_o, x_o)$$

schreiben. $\lambda(t, t_o, x_o)$ ist für (t_o, x_o) aus R_{ij} stetig in (t_o, x_o). Denken wir an (3) und verfolgen den Pfad über M_{ij_i-1} weiter zurück, so müssen wir für λ auf M_{ij_i-1} neue Anfangswerte definieren. Von rechts kommend hat ja

$\lambda(t_{ij_i-1})$ einen durch (4) und (9) festgelegten Wert.
Wir müssen wie bei (6) vorgehen.

$$\lambda^-_{j_i-1}(g(P^-_{ij_i-1})\frac{\partial T_{ij_i-1}}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ij_i-1}}{\partial s}) +$$

(10)
$$+ (f(P^-_{ij_i-1}) - f(P^+_{ij_i-1}))\frac{\partial T^-_{i,j_i-1}}{\partial s} -$$

$$- \lambda^+_{j_i-1}(g(P^+_{ij_i-1})\frac{\partial T_{i,j_i-1}}{\partial s} - \frac{\partial \chi_{ij_i-1}}{\partial s}) = 0$$

Dies ist eine lineares Gleichungsystem in den n Unbekannten $\lambda^-_{j_i-1}$. Da $\phi^{*'}(t_{i,j_i-1} - 0) = g(P^-_{i,j_i-1})$ ist, kann wieder 1.Satz 2* angewendet werden. Damit erhalten wir $\lambda^-_{j_i-1}$ als eindeutige Lösung von (10), die außerdem in (t_o, x_o) aus R_{ij} stetig ist. Deshalb können wir nun die Lösung von (4) in Intervall $[t_{i,j_i-2}, t_{i,j_i-1}]$ mit der Anfangsbedingung $\lambda(t_{i,j_i-1}) = \lambda^-_{j_i-1}$ fortsetzen und erhalten λ wieder als stetige Funktion der Anfangsbedingungen.

$$\lambda = \lambda(t, t_{i,j_i-1}, \lambda^-_{j_i-1}) = \lambda(t, t_o, x_o).$$

Wir müssen dieses Verfahren weiter verfolgen. Dazu schreiben wir (10) etwas allgemeiner für $k = j, \ldots, j_i-1$ mit Hilfe von H. Dies ergibt

(11)
$$H(P^-_{i,k}, \lambda^-_k)\frac{\partial T_{ik}}{\partial s} - \lambda^-_k\frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s} =$$

$$= H(P^+_{ik}, \lambda^+_k)\frac{\partial T_{ik}}{\partial s} - \lambda^+_k\frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s}.$$

Multiplizieren wir (11) mit $\frac{\partial s}{\partial x_o}$, so erhalten wir

$$H(P_{ik}^{-}, \lambda_k^{-}) \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} - \lambda_k^{-} \frac{\partial x_{ik}}{\partial s} =$$

$$= H(P_{ik}^{+}, \lambda_k^{+}) \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} - \lambda_k^{-} \frac{\partial x_{ik}}{\partial s}$$

Das beschriebene Verfahren muß nun bis zur Mannigfaltigkeit $M_{i,j-1}$ durchlaufen werden. Damit ist dann Satz 1 bewiesen.

Satz 2 Sei $x(t) = \phi^*(t, t_o, x_o)$ und (t_o, x_o) aus R_{ij}. Dann erfüllen die Funktionen ϕ^* und λ auf dem Intervall $t_o \leq t \leq t_{ij_1}$ für $t \neq t_{ik}$ mit $k = j, \ldots, j_1 - 1$ das System von Differentialgleichungen.

(12)
$$x' = H_\lambda(t, x, Y^*(t,x), Z^*(t,x), \lambda),$$
$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, Y^*(t,x), Z^*(t,x), \lambda);$$

dabei ist

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = H_x + H_y Y_x^* + H_z Z_x^*.$$

An den Stellen $t = t_{ik}$ für $k = j, \ldots, j_1 - 1$ gelten diese Gleichungen für einseitige Grenzwerte.

Beweis:

Da $\phi^{*\prime} = x' = g$ auf einem optimalen Pfad gilt und

$\Pi_\lambda = (f + \lambda x)_\lambda = x$ ist, folgt Satz 2 sofort aus Satz 1.

3.2 Der Multiplikator und die Wertfunktion

Nun kommen wir zum wichtigsten Satz dieses Abschnittes. Da λ immer eindeutig definiert ist, können wir mit Hilfe von λ die Ableitung des Wertes auch an Stellen bestimmen, an denen keine stetige Differenzierbarkeit gegeben ist. Entscheident trägt dazu die Parametrisierbarkeit der Mannigfaltigkeiten E_i und M_{ik} bei. Dies ist genauso beim Maximumprinzip von Pontrjagin der Fall. Nur Zachrisson hat mit etwas Erfolg an einer Deparametrisierung der Probleme gearbeitet, allerdings nur für den Fall einer reinen Endauszahlung. In der Anwendung erweist es sich oft als schwierig, die Anfangswerte für λ_{j_i} aus den Traversalitätsbedingungen zu erhalten. Jetzt wollen wir die Beziehungen zwischen λ und W untersuchen. Für diese gilt Satz 3.

Satz 3 Sei (t_o, x_o) aus R_{ij} und $t_o \leq t \leq t_{j_i}$, dann gilt für $t \neq t_{ik}$ mit $k = j, \ldots, j_i - 1$:

(a) für $x(t) = \phi^*(t, t_o, x_o)$ gilt für $t \geq t_o$:

$$W_x(t,x) = \lambda(t, t_o, x_o), \tag{13}$$

(b) Ist M_{ik} mit $j \leq k \leq j_i - 1$ eine Mannigfaltigkeit, auf der nur eine der beiden Funktionen $Y^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o))$ bzw. $Z^*(t, \phi^*(t, t_o, x_o))$ unstetig ist, dann ist λ an der Stelle t_{ik}

stetig. Es gilt also

$$\lambda_k^+ = \lambda_k^-$$

(c) Am Endpunkt $t = t_{i_1 j_1}$ gilt die Traversalitätsbedingung (8).

Beweis:

(b) ist eine sofortige Konsequenz von (a) und 2. Satz 3, in denen die Stetigkeit der Ableitungen W_x auf Unstetigkeitsmannigfaltigkeiten nur einer der beiden Funktionen Y^* oder Z^* gezeigt wird. (c) ist dem Beweis von Satz 1 entnommen. Es bleibt also nur noch Teil (a).

Dazu gehen wir zurück zu (3). Die Integrale in (3) werden wir mit Hilfe der Differentialgleichung (4) umformen. Schreiben wir in (4) die Funktion H aus, so ergibt sich

$$-\lambda' = \bar{f}_x + \bar{f}_y \bar{Y}_x^* + \bar{f}_z \bar{Z}_x^* + \lambda(\bar{g}_x + \bar{g}_y \bar{Y}_x^* + \bar{g}_z \bar{Z}_x^*)$$

und daraus

$$-\bar{f}_x = +\lambda' + \bar{f}_y \bar{Y}_x^* + \bar{f}_z \bar{Z}_x^* + \lambda(\bar{g}_x + \bar{g}_y \bar{Y}_x^* + \bar{g}_z \bar{Z}_x^*).$$

Setzen wir dies in die erste Zeile von (14) ein:

$$\begin{aligned}(14)\quad & \Big(\int_{t_0}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\,(\bar{f}_x + \bar{f}_y \bar{Y}_x^* + \bar{f}_z \bar{Z}_x^*)\,\phi_{x_o}^*\,dt = \\ &= \Big(\int_{t_0}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\,(-\lambda' - \lambda(\bar{g}_x + \bar{g}_y \bar{Y}_x^* + \bar{g}_z \bar{Z}_x^*) - \\ &\qquad - \bar{f}_y \bar{Y}_x^* - \bar{f}_z \bar{Z}_x^* + \bar{f}_y \bar{Y}_x^* + \bar{f}_z \bar{Z}_x^*)\,\phi_{x_o}^*\,dt = \\ &= \Big(\int_{t_0}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\,(-\lambda' - \lambda(\bar{g}_x + \bar{g}_y \bar{Y}_x^* + \bar{g}_z \bar{Z}_x^*)\,\phi_{x_o}^*\,dt.\end{aligned}$$

Wie wir wissen, gilt

$$\phi^{*'}(t,\ t_o,\ x_o) = g(t,\ \phi^*,\ Y^*,\ Z^*)$$

Da $(t_o,\ x_o)$ nicht von t abhängt, folgt, daß für $t \neq t_{ik}$ mit $k = j, \ldots, j_i$:

$$\phi^*_{t,x_o}(t,\ t_o,\ x_o) = \phi^{*'}_{x_o}(t,\ t_o,\ x_o) =$$

$$= (\bar{g}_x + \bar{g}_y\ \bar{Y}^*_x + \bar{g}_z\ \bar{Z}^*_x)\ \phi^*_{x_o}.$$

Da ϕ^* auf den angegebenen Intervallen in allen Variablen stetig partiell differenzierbar ist, kann die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden:

$$\phi^*_{tx_o}(t,\ t_o,\ x_o) = \phi^*_{x_o t}(t,\ t_o,\ x_o).$$

Benützt man die letzten beiden Formeln, so werden die Integrale (14) einfacher zu

$$\left(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\right)(-\lambda'\ \phi^*_{x_o} - \lambda\ \phi^{*'}_{x_o})\ dt =$$

$$= \left(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\right) d(\lambda\ \phi^*_{x_o}) = \oplus\ .$$

Weil $(\lambda \phi^*_{x_o})' = \lambda'\ \phi^*_{x_o} + \phi^{*'}_{x_o}\lambda$ ist.

Die letzten Integrale lassen sich sofort berechnen und sind nach Umordnen einiger Terme:

(15) $$\oplus = -\lambda_{j_i}\ \phi^*_{x_o}(t_{ij_i},\ t_o,\ x_o) + \lambda(t_o,\ t_o,\ x_o) \cdot$$

$$\cdot \phi^*_{x_o}(t_o,\ t_o,\ x_o) + \sum_{k=j}^{j_i-1} (\lambda^+_k\ \phi^*_{x_o}(t_{ik} + 0,\ t_o,\ x_o) -$$

$$-\lambda^-_k\ \phi^*_{x_o}(t_{ik} - 0,\ t_o,\ x_o)),$$

Nun ist $\phi^{*}_{x_o}(t_o, t_o, x_o)$ die Einheitsmatrix. Dann können wir $\lambda(t_o, t_o, x_o)$ isolieren. Ersetzen wir $\phi^{*}_{x_o}(t_{ik} \pm 0)$ noch mit Hilfe der Formeln von 1. Satz 4, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad \lambda(t_o, t_o, x_o) = &- \Big(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\, d(\lambda \phi^{*}_{x_o}) + \\
&+ \lambda_{j_i}\Big(g(P_{ij_i})\,\frac{\partial t_{ij_i}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ij_i}}{\partial x_o}\Big) + \\
&+ \sum_{k=j}^{j_i-1}\Big(\lambda^{+}_{k}\Big(-g(P^{+}_{ik})\,\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_o}\Big) - \lambda^{-}_{k}\big(g(g(P^{-}_{ik})\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ik}}{\partial x_o}\big)\Big) = \\
&= \Big(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\, d(-\lambda \phi^{*}_{x_o}) + \\
&+ \frac{-h_s - f(P_{ij_i})\cdot \dfrac{\partial T_{ij_i}}{\partial s}}{\dfrac{\partial T_{ij_i}}{\partial s} - \dfrac{\partial \chi_{ij_i}}{\partial s}}\Big(-g\,\frac{\partial t_{ij_i}}{\partial x_o} + \frac{\partial x_{ij_i}}{\partial x_o}\Big) + \\
&+ \Big(\sum_{k=j}^{j_i-1}\Big(\lambda^{+}_{k}\Big(-g(P^{+}_{ik})\,\frac{\partial T_{ik}}{\partial s} + \frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s}\Big) - \lambda^{-}_{k}\big(-g(P^{-}_{ik})\cdot \\
&\qquad \cdot \frac{\partial T_{ik}}{\partial s} + \frac{\partial \chi_{ik}}{\partial s}\big)\Big)\Big)\,\frac{\partial s}{\partial x_o} = \\
&= \Big(\int_{t_o}^{t_{ij}} + \sum_{k=j}^{j_i-1} \int_{t_{ik}}^{t_{i,k+1}}\Big)\, d(-\lambda \phi^{*}_{x_o}) + \\
&+ \big(h_s + f(P_{ij_i})\,\frac{\partial T_{ij_i}}{\partial s}\big)\,\frac{\partial s}{\partial x_o} +
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{k=j}^{j_\iota-1}\left(f(P_{ik}^-)-f(P_{ik}^+)\right)\frac{\partial T_{ik}}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_o}=W_{x_o}(t_o,\ x_o),$$

also

$$(17)\qquad \lambda(t_o,\ t_o,\ x_o)=W_{x_o}(t_o,\ x_o).$$

Zum Ersetzen von λ_{j_1} haben wir (6) und für λ_k^- mit $j \leq k \leq j_1-1$ den Ausdruck (10) benützt. Damit ist die wesentliche Schwierigkeit im Satz 3 überwunden. Dabei hat wieder die Sattelpunktbedingung, die keine tangentialen optimalen Pfade an den Mannigfaltigkeiten M_{ik} zuläßt, eine wesentliche Rolle gespielt.

Um den Beweis zu beenden, betrachten wir folgende Eigenschaft optimaler Pfade. Sei

$$\tilde{x}=\phi^*(\tilde{t},\ t_o,\ x_o)\ \text{mit}\ \tilde{t}>t_o.$$

Dann gilt für $t \geq \tilde{t}$:

$$\phi^*(t,\ \tilde{t},\ \tilde{x})=\phi^*(t,\ t_o,\ x_o),$$

und damit für $t \geq \tilde{t}$:

$$\lambda(t,\ t_o,\ x_o)=\lambda(t,\ \tilde{t},\ \tilde{x}).$$

Setzen wir nun $x=\phi^*(t,\ t_o,\ x_o)$, so ergibt sich zusammen mit (17):

$$W_x(t,x) = \lambda(t,t,x) = \lambda(t, t_o, x_o).$$

Damit ist Satz 3(a) bewiesen.

Satz 4 Für $t_o \leq t \leq t_{ij_1}$ und $t \neq t_{ik}$ mit $k = j, \ldots, j_1-1$ gilt:

$$\max_y \min_z H(t, \phi^*(t), y, z, \lambda(t)) =$$
$$= \min_z \max_y H(t, \phi^*(t), y, z, \lambda(t)) =$$
$$= H(t, \phi^*(t), y^*(t), z^*(t), \lambda(t))$$

für zulässige y und z.

Beweis:

Sei (t,x) ein Punkt auf dem optimalen Pfad, der von (t_o, x_o) ausgeht. Es ist also $x = \phi^*(t, t_o, x_o)$. Dann folgt aus 2. Satz 1 und Satz 3 sofort

$$\max_y \min_z (f + \lambda g) = \min_z \max_y (f + \lambda g) =$$
$$= \max_y \min_z (H(t, x, y, z, \lambda) = \min_z \max_y H(t, x, y, z, \lambda) =$$
$$= H(t, x, y^*, z^*, \lambda) = -W_t(t,x).$$

Dabei ist $x = \phi^*(t, t_o, x_o)$ und $\lambda = \lambda(t, t_o, x_o)$.

Die zulässigen Wahlen für y und z sind

$$y \in \{\, y\colon y = Y(t,x) \text{ und } Y \text{ aus } \mathfrak{Y}_1 \,\}$$
$$z \in \{\, z\colon z = Z(t,x) \text{ und } Z \text{ aus } \mathfrak{Z}_1 \,\} .$$

4 Eine funktionalanalytische Methode

4.1 Eine Beschreibung des Spieles

In diesem Kapitel werden wir eine etwas andere Klasse von Spielen betrachten, als in 1 bis 3. Dabei können wir die Sattelpunktbedingungen fallen lassen, die für die Hamilton-Jacobi-Theorie von 2 und die Multiplikatormethode wesentlich waren. Dafür müssen wir für die Funktionen f, g und h drastische Einschränkungen machen. Die Funktion g soll linear in x und außerdem linear und separierbar in den Kontrollfunktionen Y und Z sein. Wir werden das System von Differentialgleichungen, dem die Phasenkoordinaten, d.h. das System der kinematischen Gleichungen oder Zustandsgleichungen diesmal in integraler Darstellung schreiben. Die Transformation der Systeme der kinematischen Gleichungen in die neue Form werden wir später für spezielle Spiele untersuchen. Die Auszahlfunktion wählen wir von quadratischem Typ. Dabei ist $h = x(T)^2$. Besonders erfreulich ist, daß wir die Existenz optimaler Steuerungen nicht voraussetzen, sondern unter einigen, zwar auch sehr einschränkenden Bedingungen die Existenz optimaler Kontrollfunktionen erhalten.

Zur Berechnung optimaler Kontrollfunktionen greifen wir auf den Satz von Kuhn und Tucker für nicht lineares Programmieren in Funktionenräumen zurück. Die so gewonnen Ergebnisse lassen sich dann wegen der speziellen Gestalt der kinematischen Gleichung und der Auszahlfunktion

so vereinfachen, daß sich effektive Berechnungsmöglichkeiten für die optimalen Steuerungen ergeben. Jetzt wollen wir das Spiel genau charakterisieren.

Seien A(t,s) und B(t,s) Matrixfunktionen der Dimension n × r. Diese Funktionen seien stetig in (t,s).

Die Klasse der zulässigen Kontrollfunktionen für Spieler I sind die stückweise stetigen Funktionen y(t), so daß für jede Komponente $|y_i| \leq 1$ mit i = 1,..., r gilt.

Ebenso ist die Klasse der zulässigen Steuerungen für Spieler II beschrieben. Dies sind die stückweise stetigen Funktionen z(t), so daß für jede Komponente $|z_i| \leq 1$ mit i = 1,..., r gilt.

Die zulässigen Steuerungen liegen in einem Würfel (kompakt) eines r-dimensionalen Euklidischen Raumes.

Mit den oben gegebenen Funktionen können wir nun die Zustandsgleichungen angeben, die das System beschreiben (Yoshiyuki Sakawa, 1967, S. 273)

$$(1) \qquad x(t) = c(x) + \int_0^t A(t,s)\, y(s)\, ds + \int_0^t B(t,s)\, z(s)\, ds$$

Dies anstelle einer Differentialgleichung zu betrachten, ist das Konzept der verallgemeinerten Lösung im Sinne von Caratheodory.

Das Spiel wir verabredungsgemäß zur Zeit T abgebrochen. Seien weiter C und D positiv definite Diagonalmatrizen der Dimension r × r mit konstanten Elementen. Die Auszahlung, die aus der Anwendung der Kontrollfunktionen y = y(t) und

und $z = z(t)$ resultiert, sei durch

$$(2) \qquad P(y,z) = x(T)^2 + \int_0^T (z(t),\ C\ z(t)) - (y(t),\ D(y(t)))\ dt$$

definiert.

"(.,.)" bezeichnet das innere Produkt endlich-dimensionaler Vektoren.

Unser Problem ist es nun, einen Sattelpunkt von $P(y,z)$ zu finden. Kontrollfunktionen (y^*, z^*) für die

$$P(y,\ z^*) \leqslant P(y^*,\ z^*) \leqslant P(y^*,\ z)$$

gilt, heißen optimale Kontrollfunktionen oder Steuerungen.

4.2 Die Bestimmung des Sattelpunktes

Sei H der Hilbertraum der r-dimensionalen quadratintegrablen Funktionen über dem Intervall [o, T]. Dann gehören die zulässigen Strategien zu H. Das Innere Produkt von zwei Elementen aus dem Hilbertraum H, sagen wir z und $\tilde{z}$, definieren wir auf die übliche Weise als

$$[z,\tilde{z}] = \int_0^T (z,\tilde{z})\, dt = \int_0^T (z(t),\ \tilde{z}(t))\, dt$$

Nun definieren wir zwei Operatoren Q und V, die H in den n-dimensionalen Euklidischen Raum abbilden:

$$(3) \qquad Qy = \int_0^T A(T,\ s)\ y(s)\ ds \qquad \text{und}$$

$$Vz = \int_0^T B(T,\ s)\ z(s)\ ds\ .$$

Für den rechten Endpunkt gilt dann wegen (1):

$$(4) \qquad z_T = z(T) = c(T) + Qy + Vz = c + Qy + Vz\ ,$$

wenn wir c(T) = c setzen.

Mit diesen neuen Schreibweisen läßt sich die Auszahlung P folgendermaßen darstellen:

$$(5) \qquad P(y,z) = (z_T,\ z_T) - [y,\ Dy] + [z,\ Cz]\ .$$

Sei V^* der zu V adjungierte Operator. V^* bildet den

n-dimensionalen Euklidischen Raum in H ab und ist durch die Beziehung

$$(x, Vz) = \left[V^* x, z \right]$$

definiert. Dabei gilt: $x \in R^n$ und $y \in H$.

Satz 1 Sei $B^*(T, t)$ die transponierte Matrix von $B(T, t)$; dann gilt:

(6) $$V^* x = B^*(T, t)\, x .$$

Beweis:

Es gilt nach Definition $(x, Vz) = \left[V^* x, z \right]$. Schreiben wir Transponierte von Vektoren mit einem kleinen hochgestellten t, so folgt

$$x^t \int_0^T B(T, s)\, z(s)\, ds = \int_0^T (V^* x, z)\, ds$$

$$\Downarrow$$

$$= \int_0^T x^t B(T, s)\, z(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T (B^*(T, s)\, x)^t\, z(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T (B^*(T, s)\, x, z(s))\, ds =$$

$$= \int_0^T (V^* x, z(s))\, ds .$$

Da diese letzte Gleichung für alle zulässigen z gilt,

folgt $B^*(T,t) = V^*x$.

Ein analoges Ergebnis gilt für Q^*.

Satz 1* Sei $A^*(T,t)$ die transponierte Matrix von $A(T,t)$; dann gilt:

(7) $\quad Q^*x = A^*(T,t)\, x$.

Quadrieren wir (4), so ergibt sich:

(8) $\quad (z_T, z_T) = (Vz, Vz) + 2(Vz, Qy + c) + (Qz + c, Qz + c)$.

Nun kommen wir zu dem Existenzsatz:

Satz 2 (a) $P(y,z)$ ist konvex in z.

(b) Seien $a_i(T,t)$ mit $i = 1,\ldots, m$ die r-dimensionalen Zeilenvektoren von A, $\| y\|$, die durch das innere Produkt in H definierte Norm und $d = \min (d_1,\ldots, d_r)$.
Für $\sum_{i=1}^{m} \| a_i\|^2 \leqslant nd$ folgt: $P(y,z)$ ist konkav in y.

(c) Unter der Bedingung von (b) existiert ein Paar (y^*, z^*), das Sattelpunkt zu $P(y,z)$ ist.

Beweis:

Beweisen wir zuerst (c). $P(y,z)$ ist stetig in (y,z) be-

züglich der durch $\| \cdot \|$ definierten Topologie. Dann folgt sofort aus (a), (b) und dem Satz von Nikaido und Isoda, einem allgemeinen Existenzsatz für Gleichgewichtspunkte (Burger, Ewald, 1959) die Behauptung (c).

Nun zu (a): Setzen wir (8) in (5), benutzen dann Satz 1 mit $x = Vz$ und die Definition des adjungierten Operators, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(y,z) &= (Vz, Vz) + 2(Vz, c + Qy) + \\ &\quad + (c + Qy, c + Qy) + [z, Cz] - [y, Dy] = \\ &= [V^*Vz, z] + 2[V^*(Qy + c), z] + \\ &\quad + (Qy + c, Qy + c) + [z, Cz] - [y, Dy] = \\ &= [z, (V^*V + C) z] + 2[z, V^*(Qy + c)] + \\ &\quad + (Qy + c, Qy + c) - [y, Dy]. \end{aligned}$$

Der zweite Term ist linear in z und die beiden letzten hängen nicht von z ab. So brauchen wir lediglich den ersten zu untersuchen. Nach Satz 1 gilt:

$$[z, (V^*V + c) z] = (Vz, Vz) + [z, Cz].$$

Von beiden Teilen läßt sich zeigen, daß sie konvex in z sind. Damit ist dann auch die Summe konvex. Es sei $0 < \delta < 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\delta (Vz, Vz) + (1 - \delta) (V\tilde{z}, V\tilde{z}) - (V(\delta z + (1-\delta) \tilde{z}), \\ &\qquad V(\delta z + (1-\delta) z)) = \\ &= \delta(Vz, Vz) + (1 - \delta) (V\tilde{z}, V\tilde{z}) - \delta^2(Vz, Vz) - \\ &\quad -(1 - \delta)^2 (V\tilde{z}, V\tilde{z}) - 2\delta(1 - \delta) (Vz, V\tilde{z}) = \end{aligned}$$

$$= \delta(1-\delta)\,((Vz, Vz) + (V\tilde{z}, V\tilde{z}) - 2(Vz, V\tilde{z})) =$$
$$= \delta(1-\delta)\,(Vz - V\tilde{z}, Vz - V\tilde{z}) \geq 0.$$

Da das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst größer gleich 0 ist, folgt die Konvexität des ersten Terms. Nach einer ähnlichen Rechnung erhalten wir, da C eine Diagonalmatrix ist,

$$\delta[z, Cz] + (1-\delta)[\tilde{z}, C\tilde{z}] - [\delta z + (1-\delta) z, C(\delta\tilde{z} + (1-\delta)\tilde{z})] =$$
$$= \delta(1-\delta) \int_0^T (z - \tilde{z}, C(z - \tilde{z}))\, ds \geq 0,$$

da C positiv definit ist.
Zum Beweis von (b) erhalten wir analog wie in (a);

$$P(y,z) = [y, (Q^*Q - D)\, y] + 2[y, Q^*(Vz + c)] + (Vz + c, Vz + c) + [z, Cz].$$

Dazu untersuchen wir wieder nur den ersten Term. Dieser ist wie in (a) umgeformt:

$[y, (Q^*Q - D)\, y] = (Qy, Qy) - [y, Dy]$. Dann bilden wir

$$(Q(\delta\bar{y} + (1-\delta)\tilde{y}), Q(\delta\bar{y} + (1-\delta)\tilde{y})) -$$
$$-[\delta\bar{y} + (1-\delta)\tilde{y}, D(\delta\bar{y} + (1-\delta)\tilde{y})] -$$
$$-\delta(Q\bar{y}, Q\bar{y}) - (1-\delta)(Q\tilde{y}, Q\tilde{y}) + \delta[\bar{y}, D\bar{y}] +$$
$$+[(1-\delta)\tilde{y}, D\tilde{y}] =$$

$$= \delta(1-\delta)\,(-(Q\bar{y}, Q\bar{y}) - (Q\tilde{y}, Q\tilde{y}) + 2(Q\bar{y}, Q\bar{y}) +$$
$$+ [\bar{y}, D\bar{y}] + [\tilde{y}, D\tilde{y}] - 2[\bar{y}, D\tilde{y}]) =$$
$$= \delta(1-\delta)\,(-(Q\bar{y} + Qy, Q\bar{y} + Qy) + [\bar{y} + \tilde{y}, D(\bar{y} + \tilde{y})].$$

Setzen wir nun $y = \bar{y} + \tilde{y}$, so ergibt sich

$$(9) \qquad \delta(1-\delta)\,(-(Qy, Qy) + [y, Dy]).$$

Schätzen wir (Qy, Qy) mit der Schwarzschen Ungleichung ab, so ist

$$(Qy, Qy) = \sum_{i=1}^{m} [a_i, y]^2 \leq \|y\|^2 \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|^2 ,$$
$$[y, Dy] \geq n\|y\|^2 d ,$$

Setzen wir dies in (9) und benutzen die Bedingung aus (b), so folgt

$$-(Qy, Qy) + [y, Dy] \geq -\|y\|^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 - nd\Big) \geq 0.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Als nächstes wenden wir uns dem Satz von Kuhn und Tucker für Funktionenräume zu. Um diesen Satz benutzen zu können, müssen wir vorher noch die zulässigen Steuerungen transformieren. Sei k eine Abbildung von H nach H, die wie folgt definiert ist:

$$k(y) = \begin{bmatrix} 1 - y_1^2(t) \\ \vdots \\ 1 - y_r^2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{und}$$

$$k(z) = \begin{bmatrix} 1 - z_1^2(t) \\ \vdots \\ 1 - z_r^2(t) \end{bmatrix} .$$

Die Bedingung: (y,z) sind zulässige Steuerungen, läßt sich dann durch

$$k(y) \geqslant 0 \qquad \text{und } k(z) \geqslant 0$$

ausdrücken. Die Menge

$$\{ y \in H: k(y) \geqslant 0 \}$$

ist eine abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmenge von H.

Jetzt formulieren wir den Satz von Kuhn und Tucker für Funktionenräume, so daß er sofort auf unser Problem anwendbar ist.

Satz von Kuhn und Tucker (Leonid Hurwicz, 1958).

Sei y^* das Element aus H, das P(y,z) unter den den Nebenbedingungen $k(y) \geqslant 0$ maximiert, und z^* das Element aus H, das P(y,z) unter den Nebenbedingungen $k(z) \geqslant 0$ minimiert.

Dann existieren Multiplikatoren λ^* und μ^* aus H mit der Eigenschaft

$$\lambda^* \geqslant 0, \qquad \mu^* \geqslant 0,$$

so daß für den Lagrangeschen Ausdruck

$$L(y,z,\lambda,\mu) = P(y,z) + [\lambda, k(y)] - [\mu, k(z)]$$

die ersten Variationen nach y und z an der Stelle $(y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*)$ verschwinden und die Nebenbedingungen orthogonal in H zu den Multiplikatoren sind. Also

(10) $\delta_{y;e} L(y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*; e) = 0$ für alle e aus H,
$[\lambda^*, k(y^*)] = 0$ und

(11) $\delta_{z;e} L(y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*; e) = 0$ für alle e aus H,
$[\mu^*, k(z^*)] = 0.$

Die erste Variation heißt auch schwaches Differential oder Fréchet-Differential. Wir möchten bemerken, daß die Existenz eines Fréchet-Differentials eine relativ schwache Forderung an den zu differenzierenden Operator ist. Aus der Existenz der ersten Variation folgt nicht einmal die Stetigkeit des Operators an dieser Stelle.

Bilden wir die ersten Variationen (10), (11) an der Stelle $(y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*)$, so erhalten wir

(12) $$(Q^*Q - D)\, y + Q^*Vz + Q^*c + 1/2 \frac{\partial k(y)}{\partial y} \cdot \lambda^* = 0,$$

$$(V^*V + C)\, z + V^*Qy + V^*c - 1/2 \frac{\partial k(z)}{\partial z} \cdot \mu^* = 0.$$

Dabei ist

$$\frac{\partial k(y)}{\partial y} = -2 \begin{bmatrix} y_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_r \end{bmatrix}.$$

Definieren wir nun zwei neue r-dimensionale Funktionen

$$u = Dy^* - 1/2 \frac{\partial k(y^+)}{\partial y^+} \cdot \lambda^* = \begin{bmatrix} d_1 y_1^* + \lambda_1^* y_1^* \\ \\ d_r y_r^* + \lambda_r^* y_r^* \end{bmatrix}$$

(13) und

$$v = Cz^* - 1/2 \frac{\partial k(z^*)}{\partial z^*} \cdot \mu^* = \begin{bmatrix} c_1 z_1^* + \mu_1^* z_1^* \\ \\ c_r z_r^* + \mu_r^* z_r^* \end{bmatrix} .$$

Damit können wir die Gleichungen (12) kürzer schreiben, nämlich:

(14) $$Q^*(Qy^* + Vz^* + c) - u = 0 ,$$

$$V^*(Qy^* + Vz^+ + c) + v = 0 .$$

Aus den Orthogonalitätsrelationen von (10) und (11) erhalten wir für $0 \leq t \leq T$:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_i^*(t) = 0 & \text{für } -1 < y_i^*(t) < 1 , \\ \lambda_i^*(t) \geq 0 & \text{für } |y_i^*(t)| = 1 , \end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Ebenso gilt für μ^*:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu_i^*(t) = 0 & \text{für } -1 < z_i^*(t) < 1, \\ \mu_i^*(t) \geq 0 & \text{für } |z_i^*(t)| = 1, \end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Definieren wir jetzt eine Funktion I mit Komponenten

$$I_i(v) = \begin{cases} \dfrac{v_i}{c_i} & \text{für } \left|\dfrac{v_i}{c_i}\right| < 1 , \\ \operatorname{sign} \dfrac{v_i}{c_i} & \text{für } \left|\dfrac{v_i}{c_i}\right| \geq 1, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, r,$$

und ebenso eine Funktion j mit Komponenten

$$j_i(u) = \begin{cases} \frac{u_i}{d_i} & \text{für } \left|\frac{u_i}{d_i}\right| < 1, \\ \operatorname{sign} \frac{u_i}{d_i} & \text{für } \left|\frac{u_i}{d_i}\right| \geq 1, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Zusammen mit den Orthogonalitätsrelationen läßt sich (13) mit Hilfe von j und l als

$$(15) \qquad y^*(t) = j(u(t)) \qquad \text{und}$$

$$z^*(t) = l(v(t))$$

schreiben.
Setzt man dies in (14) ein, so erhalten wir ein System nicht linearer Integralgleichungen, aus dem u und v bestimmt werden können:

$$(16) \qquad Q^*(Qj(u) + Vl(v) + c) - u = 0,$$

$$V^*(Qj(u) + Vl(v) + c) + v = 0.$$

Wir wollen dieses System weiter umformen, um u und v leichter gewinnen zu können.

Definieren wir eine Abbildung F von $R^n \to R^n$. Dabei seien

$$Q^*x = A^*(T,t)\, x = \begin{bmatrix} a_1^*(T,t)\, x \\ \vdots \\ a_r^*(T,t)\, x \end{bmatrix}$$

und

$$V^*x = B^*(T,t)\ x = \begin{bmatrix} b_1^*(T,t)\ x \\ \vdots \\ b_r^*(T,t)\ x \end{bmatrix} .$$

Damit definieren wir F als

$$Fx = \sum_{i=1}^{r} \int_0^T \left(+a_i^*(T,t) \cdot j_i(a_i^{*t}(T,t)\ x) - \right.$$
$$\left. -b_i^*(T,t)\ l_i(b_i^{*t}(T,t)\ x) \right) dt + c .$$

Satz 3 Existiert ein optimaler Pfad und erreichen wir $x(T) = x_T$ auf einem optimalen Pfad, dann erfüllt $x(T) = x_T$ das System von transzendenten Gleichungen $Fx = x$.

Beweis:

Gibt es keinen optimalen Pfad, so kann die Gleichung $Fx = x$ natürlich auch Lösungen besitzen. Setzen wir den folgenden Ausdruck aus (16) gleich x

(17) $\quad Qj(u) + Vl(v) + c = x$

und setzen diesen in die beiden Gleichungen von (16) ein, dann erhalten wir

(18) $\quad u = Q^*x \qquad$ und $\qquad v = -V^*x .$

Denken wir an die Zustandsgleichung (1) und die Definition

der Operatoren Q und V, so sehen wir sofort, daß das x, welches durch (17) definiert wird, $x(T) = x_T$ darstellt. Setzen wir (17) in (18) ein, so folgt

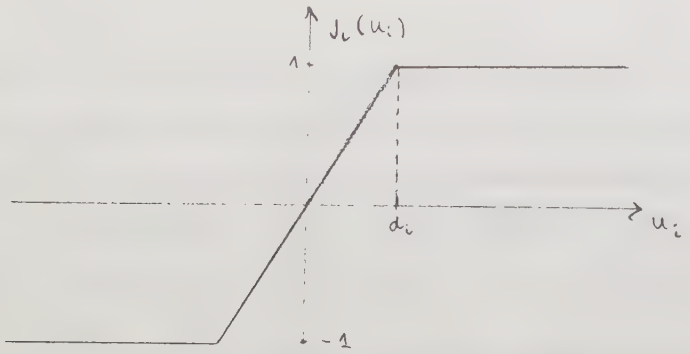
$$Qj(Q^*x) - Vl(V^*x) + c = x,$$

Schreibt man die linke Seite aus, so ist dies genau die Definition des Operators F.
Damit ist Satz 3 bewiesen.

Haben wir $x(T) = x_T$, den Endpunkt des optimalen Pfades berechnet, so können wir auch sofort ein Paar optimaler Kontrollfunktionen angeben. Da $u(t) = Q^*x_T$ ist, gilt

$$u(t) = A^*(t,t)\, x_T .$$

Aus der Beziehung $y^+(t) = j(u(t))$ folgen dann sofort die Werte für y^*.



Ebenso läßt sich $z^*(t)$ berechnen. Es ist

$$v(t) = B^*(T,t)\, x_T .$$

Das damit bestimmte v(t) wird in $z^*(t) = l(v(t))$ eingesetzt und man erhält die Werte von z^*.

Es ist bemerkenswert, daß diese Klasse von Spielen im allgemeinen nicht zu "Bang-Bang"-Kontrollfunktionen führt, sondern daß sich die Kontrollfunktionen stetig ändern. Außer für einfachste Folgespiele finden sich in dem Buch von Isaacs keine Beispiele für solche Spieltypen.

Satz 4 Das System $Fx = x$ besitzt eine Lösung.

Beweis:

Schreiben wir die n Komponenten der Vektoren Fx, a_i, b_i und c als $(Fx)_m$, a_{im}, b_{im} und c_m mit $m = 1, \ldots, n$.
Da $|j_i(u)|$ und $|l_i(v)| \leq 1$ sind, folgt

$$|(Fx)_m| \leq \sum_{i=1}^{r} \int_0^T (|a_{im}(T,t)| + |b_{im}(T,t)|)\,dt + c_m$$

für $m = 1, \ldots, n$.
Da alle Komponenten von A, B und c nach Voraussetzung stetig sind, zeigt dies, daß F eine Selbstabbildung einer abgeschlossenen beschränkten konvexen Untermenge des R^n ist. Da F außerdem stetig ist, können wir den Fixpunktsatz von Brouwer anwenden und erhalten die Existenz mindestens eines x, so daß $Fx = x$.

Für die praktische Anwendung möchten wir noch eine numerische Berechnungsmöglichkeit des Fixpunktes von F angeben. Unter einer zusätzlichen Voraussetzung können wir

zeigen, daß die Methode der sukzessiven Approximation zu einer eindeutigen Lösung konvergiert. Verfahren von diesem Typ eignen sich sehr gut für Ziffernrechner. Dies scheint die einzige Klasse von Differentialspielen zu sein, bei der man auch umfangreichere Beispiele rechnerisch bewältigen kann.

Satz 5 Sei $c = \min(c_1, \ldots, c_r)$, $d = \min(d_1, \ldots, d_r)$; gilt

$$\sum_{i=1}^{r} \int_0^T \left(\frac{1}{c} |a_i(T, t)|^2 + \frac{1}{d} |b_i(T,t)|^2\right) dt < 1,$$

dann konvergiert die Methode der sukzessiven Approximation

$$x_{(n)} = Fx_{(n-1)}$$

von einem beliebigen Anfangspunkt $x_{(o)} \neq 0$ zu einer eindeutigen Lösung von $Fx = x$.

Da es sich im wesentlichen um ein numerisches Verfahren handelt, wollen wir diesen Satz nicht beweisen. Es läßt sich zeigen, daß unter den gegebenen Voraussetzungen F eine Kontraktionsabbildung ist. Daraus folgt dann die Konvergenz der Methode. Kontraktionsabbildungen sind in weiten Gebieten der Kontrolltheorie und des dynamischen Programmierens von großer Bedeutung.

Über die Art der Konvergenz kann man sagen, daß sie mindestens proportional der durch

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{0}^{T} \left(\frac{1}{c} |a_i|^2 + \frac{1}{d} |b_i|^2 \right) dt$$

gegebenen Konstanten ist. Auch für den Fall, der nicht in unserem Satz enthalten ist, daß nämlich mehrere Fixpunkte vorhanden sind, gibt es bekanntermaßen in der numerischen Analysis Methoden, diese aufzufinden, z.B. für den Fall, daß die Iteration zwischen zwei Punkten oszilliert.

4.3 Ein Folge- bzw. Verfolgungsspiel

Betrachten wir ein Folgespiel, bei dem die Kontrollfunktionen für die beiden Spieler den Bedingungen genügen, die in 4.1 formuliert sind. Wir wollen das System der Bewegungsgleichungen in der üblichen Weise angeben. Da die Systeme, die wir untersuchen, linear sein werden, können wir die Integrale sofort explizit angeben und auf die Form (1) bringen. Wir wollen das Spiel als reines zeitminimales für der Verfolger auffassen. Die Indizes p und e sollen andeuten, daß die jeweiligen Funktionen zu dem minimierenden Spieler, Verfolger (pursuer) oder zum maximierenden Spieler, Verfolgter (evader) gehören. Das Spiel gilt als beendet, wenn die Koordinaten des Verfolgers und Verfolgten zusammenfallen. Da die Zeit, die bis zu diesem Augenblick vergeht, die Auszahlung ist, werden wir auch das Sattelpunktproblem von 1.1 neu formulieren müssen.

Seien $A_p(t)$ und $A_e(t)$ gegebene nxn Matrizen, $B_p(t)$, $B_e(t)$ von der Dimension nxr und q_p, q_e seien n-dimensionale Vektoren. Alle diese Größen seien stetig in t, (d.h. alle Komponenten seien stetig in t).

Für die kinematischen Gleichungen des Verfolgers gelte

$$x_p' = A_p(t)\, x_p + B_p(t)\, z(t) + q_p \tag{19}$$

und als Anfangsbedingung

$$x_p(0) = x_{po}\,.$$

Die Bewegungsgleichungen des fliehenden Objektes seien durch

$$x_e' = A_e(t)\, x_e + B_e(t)\, y(t) + q_e(t) \tag{20}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x_e(0) = x_{eo}$$

gegeben.

Da der Verfolger den fliehenden Punkt zu erreichen sucht, werden wir als Zustand des Spieles die Differenz der Koordinaten des folgenden und des verfolgten Spielers nehmen:

$$x(t) = x_p(t) - x_e(t)\,. \tag{21}$$

Die Systeme (19) und (20) sind linear. Daher können wir x_p und x_e angeben und so (21) auf die Form (1) zurückführen, um dann die Ergebnisse von 4.2 anzuwenden.

Dazu noch einige grundlegende Bemerkungen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. (R. Bellmann, 1960).

Ist $\tilde{A}(t)$ für $t \geq 0$ eine stetige Matrixfunktion, dann gibt es genau eine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$x' = \tilde{A}(t)\, x$$

mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_o .$$

Diese Lösung läßt sich für $t \geqslant 0$ in der Form

$$x(t) = X(t)\, x_o$$

darstellen.

Dabei ist $X(t)$ die eindeutige Lösung der Matrix-differentialgleichung

$$X' = \tilde{A}(t)\, X$$

mit der Anfangsbedingung

$$X(0) = I .$$

Die Matrix $X(t)$ ist für $t \geqslant 0$ nicht singulär.
Um zur Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x' = \tilde{A}(t)\, x + f(t) \quad ; \quad x(0) = x_o \tag{22}$$

zu kommen, benützen wir die Methode der Variation der Konstanten. Wir suchen die Lösung in der Form

$$x = Xw .$$

Setzen wir dies zusammen mit der Lösung der homogenen Gleichung in die inhomogene ein, so ist

$$X'w + Xw' = \tilde{A}(t)\, Xw + f(t).$$

Daraus erhalten wir

$$Xw' = f(t), \qquad \text{also}$$
$$w' = X^{-1}(t)\, f(t),$$

da ja $X(t)$ nicht singulär sein kann. Durch Integration

erhalten wir

$$w = x_o + \int_0^t X^{-1}(s)\, f(s)\, ds.$$

Daraus erhalten wir für die Lösung des inhomogenen Systems

$$(23) \qquad x = X(t)\, x_o + \int_0^t X(t)\, X^{-1}(s)\, f(s)\, ds.$$

Auf diese Weise erhalten wir für $x_p(t)$:

$$x_p(t) = X_p(t)\, x_{po} + \int_0^t (X_p(t)\, X_p^{-1}(s)\, B_p(s)\, u(s) + X_p^{-1}(s)\, q_p(s))\, ds$$

und, für $x_e(t)$,

$$x_e(t) = X_e(t)\, x_{eo} + \int_0^t (X_e(t)\, X_e^{-1}(s)\, B_e(s)\, u(s) + X_e^{-1}(s)\, q_e(s))\, ds.$$

Setzen wir diese beiden Ergebnisse in (21), so erhalten wir folgende Ausdrücke für A, B und c in der Form (1),

$$c = X_p(t)\, x_{po} - X_e(t)\, x_{eo} + \int_0^t X_p(t)\, X_p^{-1}(s)\, q_p(s)\, ds - \int_0^t X_e(t)\, X_e^{-1}(s)\, q_e(s)\, ds,$$

$$A(t,s) = X_e(t)\, X_e^{-1}(s)\, B_e(s),$$

$$B(t,s) = X_p(t)\, X_p^{-1}(s)\, B_p(s).$$

Damit haben wir das Folgeproblem auf die Gestalt (1) zurückgeführt. Nun müssen wir noch die Auszahlfunktion umformulieren.

Sei $T_{y,z}$ die kleinste Zeit, die $x(T_{y,z}) = 0$ bei Anwendung der Kontrollfunktionen y(t) und z(t) erfüllt. Gesucht ist nun ein Paar von Steuerungen y^*, z^*, so daß

$$z(T_{y^*,\ z^*}) = 0$$

und

$$T_{y^*,\ z^*} = \min_z \max_y T_{y,z} = \max_y \min_z T_{y,z} .$$

Wir suchen somit einen Sattelpunkt, für den gilt:

$$T_{y,z^*} \leqslant T_{y^*,\ z^*} \leqslant T_{y^+,\ z}$$

Setzen wir in (2) die Matrizen C und D gleich der Nullmatrix, so erhalten wir im Spiel mit der Auszahlfunktion

$$P_1(y,z) = (x(T),\ x(T)).$$

Satz 6 Gibt es eine Zeit T, so daß der Wert des Spieles $P_1(y^*,\ z^*)$ verschwindet, dann gibt es eine Lösung zum obigen Folgeproblem.

Beweis:

Aus (13) erhalten wir, mit C = D = 0,

$$u = \begin{bmatrix} \lambda_1^* y_1^* \\ \vdots \\ \lambda_r^* y_r^* \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} \mu_1^* z_1^* \\ \vdots \\ \mu_r^* z_r^* \end{bmatrix}$$

Dadurch werden die Funktionen j und l einfach zu

$$j(u) = \operatorname{sign}(u) \quad ; \quad l(v) = \operatorname{sign}(v)$$

Das System Fx = x, aus dem wir x(T) bestimmen, wird damit zu

$$Fx = \sum_{i=1}^{r} \int_0^T (a_i^*(T,t) \operatorname{sign} (a_i^{*t}(T,t)\, x) - b_i^*(T,t) \operatorname{sign} (b_i^{*t}(T,t)\, x))\, dt + c = x .$$

Sei $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl und $\bar{x}$ ein Vektor mit $|\bar{x}| = 1$, so daß

$$x = \varepsilon \bar{x} .$$

Damit können wir obige Gleichung für x umformen:

$$\varepsilon \bar{x} = \sum_{i=1}^{r} \int_0^T (a_i^*(T,t) \operatorname{sign} (a_i^{*t}(T,t)\, \bar{x}) - b_i^*(T,t) \operatorname{sign} (b_i^{*t}(T,t)\, \bar{x}))\, dt + c = 0 .$$

Die kleinste Zeit T und ein Vektor $\bar{x}$ mit $|\bar{x}| = 1$, die Lösung des Systems (24) sind, geben dann eine Lösung des Folgeproblems. Das heißt

$$T_{y^*,\, z^*} = T ,$$

Auch die optimalen Kontrollfunktionen lassen sich dann sofort bestimmen. Es ist

$$y^*(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign} (a_1^{*t}(T,t)\, \bar{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{sign} (a_r^{*t}(T,t)\, \bar{x}) \end{bmatrix}$$

und

$$z^*(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign} (b_1^{*t}(t,t)\, \bar{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{sign} (b_r^{*t}(T,t)\, \bar{x}) \end{bmatrix} .$$

Der Hinweis darauf ist angebracht, daß das Folgespiel im Gegensatz zu den typischen Spielen von Abschnitt 4.2 zu den Kontrollfunktionen führt, die koordinatenweise "Bang-Bang"-Kontrollen sind. Dies liegt am Verschwinden von C und D.

4.4 Eine Anwendung auf die stochastische Kontrolltheorie

Sei $A(t)$ eine $n \times n$-Matrix, seien $B_1(t)$ und $B_2(t)$ zwei $n \times r$-Matrizen und $f(t)$ eine n-dimensionale Vektorfunktion. $y(t)$ stelle eine r-dimensionale Vektorfunktion dar, von der wir nur wissen, daß $|y_i(t)| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, r$ ist. $y(t)$ ist eine Störfunktion mit unvorhersagbaren Realisierungen. Für $z(t)$ gelte ebenfalls $|z_i| \leq 1$ für $i = 1, \ldots, r$. Z stehe aber unter der Kontrolle des minimierenden Spielers. Damit definieren wir nun die Zustandsgleichungen des Systems.

$$(25) \qquad x' = A(t)\, x + B_1(t)\, y(t) + B_2(t)\, z(t) + f(t)$$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$.

Benützen wir (23), so läßt sich (25) auf Form (1) bringen. Es ist dann

$$c(t) = X(t) \left(x_0 + \int_0^t X^{-1}(s)\, f(s)\, ds\right),$$

$$A(t,s) = X(t)\, X^{-1}(s)\, B_1(s) \qquad \text{und}$$

$$B(t,s) = X(t)\, X^{-1}(s)\, B_2(s).$$

Damit läßt sich unsere Methode auch auf gewisse Typen von stochastischen Kontrollprozessen anwenden. Wesentlich ist dabei die Beschränktheit von $y(t)$.

5 Ein Differentialspielmodell in der Duopolabsatzplanung

Zuerst werden wir uns fragen, welche Größen wir in Zusammenhang mit Differentialspielen in der Absatzplanung beachten müssen. Das Modell wird dann charakterisieren, wie sich diese Größen auf den Absatz von zwei Unternehmungen auswirken, die in Konkurrenz zueinander stehen. Über die Voraussetzungen, die wir für die Trendvariable machen, das ist in unserem Fall eine Funktion der Zeit, auf die die beiden Spieler mittels ihrer Kontrollvariablen keinen Einfluß haben, werden wir später berichten.

Welche Mittel stehen nun den Unternehmen zur Verfügung, d.h. über welches absatzpolitische Instrumentarium verfügen sie und welche Intrumentalvariablen lassen sich sinnvoll im Rahmen der Differentialspiele beschreiben?

Die Art des Vertriebssystems läßt sich schlecht als stetiger Kontrollprozess auffassen. Wir werden die Absatz- und Vertriebsmethode als fest vorgegeben betrachten. Wollten wir auch untersuchen, wie sich verschiedene Methoden des Vertriebssystems auswirken, so müßten wir gemischte diskret-kontinuierliche Optimierungsaufgaben betrachten. Dies möchten wir aber vermeiden.

Ebensowenig werden wir uns mit der Produkt- und Sortimentgestaltung befassen. Dies würde nämlich sofort den Übergang zu einem neuen Spiel bedeuten. Dieses Modell kann zwar formal so aussehen wie das alte, muß aber zum Auffinden von Sattelpunktpolitiken vollkommen neu analy-

siert werden.

Die Werbung, gemessen in den durch sie verursachten Kosten, als Mittel des absatzpolitischen Instrumentariums scheint uns dagegen für die Modellbeschreibung gut geeignet zu sein. Wir wollen annehmen, daß die Änderung des Absatzes stetig von den Werbungskosten abhängt. Das Modell hat auch die Eigenschaft, daß die Werbung, die zur Vergrößerung der Gesamtabsatzmenge führt, nicht nur der Vergrößerung der Absatzmenge des Werbenden dient. Dies hat sich in der Praxis auf dem amerikanischen Getränkemarkt für Cola-Getränke gezeigt. Dort führte eine große Werbekampagne von Coca-Cola nicht nur zur Anhebung des Absatzes von Coca-Cola, sondern ebenso zur Verbesserung der Absatzmenge von Pepsi-Cola. Für das Modell werden wir einen festen Werbeetat vorgeben. Dadurch erhalten wir zwar noch integrale Nebenbedingungen, die sich jedoch sofort in die übliche Form überführen lassen. Außerdem müssen die Werbekosten im Zeitpunkt t beschränkt sein.

Als zweites Mittel des absatzpolitischen Intrumentariums, das wir als Kontrollfunktion in einem Spiel betrachten können, ergibt sich die Preispolitik. Zwar vollzieht sich die Preisbildung als gesamtwirtschaftlicher Prozess. Es läßt sich aber nicht betreiten, daß Unternehmen innerhalb eines gewissen Intervalls frei über ihre Preise entscheiden können. Die Änderung des Absatzes der einzelnen Unternehmung soll im Modell stetig von ihrer Preisvariablen abhängen.

Der Trend auf dem Markt sei eine vorgegebene,

stetig differenzierbare Funktion der Zeit und des gesamten Umsatzes. Der Trend für die beiden Unternehmer setzt sich dann aus diesem und den absatzpolitischen Maßnahmen des anderen zusammen. Nun sind wir soweit, das mathematische Modell zu formulieren.

Sei $x(t)$ die Höhe des Absatzes der beiden Unternehmer zusammen zur Zeit t.
$x_1(t)$ sei die Höhe des Absatzes von dem ersten und $x_2(t)$ die Höhe des Absatzes des zweiten der beiden Kontrahenten. Für den Gesamtabsatz gelte:

$$(1) \qquad x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

Der Preis des ersten Unternehmers $p_1(t)$ zur Zeit t liege in einem fest vorgegebenen Intervall. Dasselbe gelte für $p_2(t)$. Für die Instrumentalvariablen $w_1(t)$ und $w_2(t)$, die Werbekosten, nehmen wir an, daß Null der linke Eckpunkt ihres kompakten Wertebereichs sei.
Die Änderung der Höhe des Absatzes genüge der Zustandsgleichung

$$(2) \qquad x'(t) = g_{o1}(x_1(t),\ p_1(t),\ w_1(t)) + \\ + g_{o2}(x_2(t),\ p_2(t),\ w_2(t)) + h(t,x),$$

Dabei seien g_{o1} und g_{o2} stetig differenzierbar in allen ihren Argumenten. (Dies muß wegen der Anwendbarkeit der in 1 und 2 entwickelten Theorie gefordert werden.)
Nehmen wir an, daß sich die Zustandsgleichungen für die beiden Spieler in derselben Form schreiben lassen. Dabei

sei $0 < \delta < 1$. Wir haben:

$$(3) \qquad x_1' = g_{11}(x_1(t),\ p_1(t),\ w_1(t)) - \\ - g_{12}(x_2(t),\ p_2(t),\ w_2(t)) + \delta\, h(t,x).$$

Wir schreiben $- g_{12}$, da Spieler II im allgemeinen versuchen wird, x_1' nicht groß werden zu lassen. Nun gilt:

$$(4) \qquad x_2' = - g_{21}(x_1(t),\ p_1(t),\ w_1(t)) + \\ + g_{22}(x_2(t),\ p_2(t),\ w_2(t)) + (1 - \delta)\, h(t,x),$$

Ist dies zulässig, so folgt

$$x_1' = g_{o1}(x_1,\ p_1,\ w_1) + g_{21}(x_1,\ p_1,\ w_1) + \\ + g_{o2}(x_2,\ p_2,\ w_2) - g_{22}(x_2,\ p_2,\ w_2) + h(t,x).$$

Daraus erhalten wir für den Zusammenhang der g_{ij} folgende Bedingungen:

$$(5) \qquad g_{o1}(x_1,\ p_1,\ w_1) = g_{11}(x_1,\ p_1,\ w_1) - g_{21}(x_1,\ p_1,\ w_1),$$

$$g_{o2}(x_2,\ p_2,\ w_2) = g_{22}(x_2,\ p_2,\ w_2) - g_{12}(x_2,\ p_2,\ w_2).$$

Ein plausibler Wert für δ wäre zum Beispiel $\frac{x_1}{x}$. Das heißt, der allgemeine Trend wirkt sich für einen Unternehmer in der Änderung des Absatzes proportional zu seinem Marktanteil aus.

Dieses allgemein gehaltene Modell soll jetzt

linearisiert werden. Wir erhalten:

$$(6) \qquad x' = A_{oo}x + A_{o1}p_1 + A_{o2}w_1 + A_{o3}p_2 + A_{o4}w_2 + h(t).$$

Darin setzen wir $A_{oo} = 0$. Sonst erhalten wir den Fall exponentieller Lösungen. Dies ist eine recht plausible Annahme, da sonst der Gesamtabsatz selbst für kleine Werte von h(t) und ohne Zutun der Unternehmer rapide wachsen würde.

Sind auch die Zustandsgleichungen der beiden Spieler linear wie in (6), nämlich:

$$x_1' = A_{11}p_1 + A_{12}w_1 - A_{13}p_2 - A_{14}w_2 + \delta h(t),$$

$$x_2' = -A_{21}p_1 - A_{22}w_1 + A_{23}p_2 + A_{24}w_2 + (1 - \delta) h(t),$$

so genügen die Koeffizienten folgenden Beziehungen:

$$A_{o1} = A_{11} - A_{21}, \qquad A_{o2} = A_{12} - A_{22},$$

$$A_{o3} = -A_{13} + A_{23}, \qquad A_{o4} = -A_{14} + A_{24}.$$

Die Übertragung auf den Fall, daß der Absatz x ein Vektor ist, der sich aus mehreren Komponenten, sagen wir n, zusammensetzt, liegt nahe.

Seien $(p_{11}(t),\ldots, p_{1n}(t))$ und $(p_{21}(t),\ldots, p_{2n}(t))$ die Preisvektoren und $(w_{11},\ldots, w_{1n})$ und $(w_{21},\ldots, w_{2n})$ die Werbekosten, die für die einzelnen Produkte aufgebracht werden. In der Praxis ist eine solche Aufspaltung

problematisch, in vielen Fällen sogar unmöglich.

Die Größen A_{ij} mit $i = 1,2,3$ und $j = 1,\ldots, 2n$ werden dann $n \times n$-Matrizen. Für den Fall, daß diese Diagonalmatrizen sind, ist der Absatz der einzelnen Komponenten voneinander unabhängig.

Da wir das Problem so formuliert haben, daß ein Absatzzuwachs des einen ein Verlust für den anderen ist, können wir die Zweipersonen-Nullsummen-Spieltheorie darauf anwenden. Um die Beschreibung des Modells vollständig zu machen, müssen wir noch die Auszahlfunktion definieren.

Soll der Absatz in der Zeit $[0,T]$ maximiert werden, so können wir wegen des strikten Interessengegensatzes Unternehmer I als maximierenden Spieler nehmen und die Auszahlfunktion erscheint in der Form:

$$P(p_1, w_1; p_2, w_2) = \int_0^T x_1 \, dt \, .$$

Auch wenn x ein Vektor ist, läßt sich die Auszahlfunktion genauso definieren. Wir müssen für x_1 lediglich das innere Produkt von x_1 mit einem Vektor nehmen, dessen Komponenten alle 1 sind, d.h. die Summe der Komponenten.

Für den Fall, daß auch die Kostenfunktionen der beiden Unternehmer linear und streng monoton sind, fällt das obige Problem mit dem der Gewinnmaximierung zusammen.

Sind nicht lediglich die maximalen Werbekosten zum Zeitpunkt t für alle t aus $[0,T]$ beschränkt, sondern ist zusätzlich noch das Werbebudget so beschränkt, daß nicht die ganze Zeitspanne $[0,T]$ mit maximalen Kosten geworben werden kann, so läßt sich dieses als integrale Nebenbedingung formulieren, nämlich:

$$\int_0^T w_1 \, dt = c_1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^T w_2 \, dt = c_2 .$$

Um dieses Spiel zu formulieren, führen wir zwei neue Zustandsvariable ein:

$$x'_{(1)} = - w_1 \qquad \text{und} \qquad x'_{(2)} = - w_2 .$$

Die Endfläche ist die von vorher, bereichert um die Bedingungen $x_{(1)} = 0$ und $x_{(2)} = 0$. Auch die Ausgangspositionen sind die von vorher, zusammen mit $x_{(1)}(0) = c_1$ und $x_{(2)}(0) = c_1$.

Gibt es also Sattelpunktlösungen zu diesem Problem, die den Forderungen von Abschnitt 1 genügen, so gelten für diese die notwendigen Bedingungen von den Abschnitten 2 und 3.

6 Stochastische Differentialspiele

6.1 Ein stochastisches Analogon zur Gleichung von Isaacs

In diesem Kapitel wollen wir uns auf Spiele mit vorbestimmter Dauer T beschränken.

Die Werte der Kontrollfunktion Y(t,x) mögen einer festen konvexen und kompakten Teilmenge $\mathcal{Y}$ eines endlich dimensionalen Euklidischen Raumes angehören. Das gleiche gelte für die Werte der Kontrollfunktion Z(t,x) aus $\mathcal{Z}$. Über die Bewegungsgleichung der Phasenkoordinate werden wir das stochastische Element einführen. Damit wird der Pfad ein stochastischer Prozess, der von zwei Parametern abhängt. Schreiben wir die Bewegungsgleichung zuerst formal hin. In diesem Fall ist es von Vorteil, diese Gleichungen mit Hilfe von Differentialen zu schreiben. Dann untersuchen wir die Bedeutung der einzelnen Terme.

$$(1) \qquad dx(t) = g(t,x,y,z)\,dt + \sigma(t,x,y,z)\,dw(t)$$

Dabei sei n die Dimension von x(t) und σ eine n×n-Matrixfunktion. Die Größe w(t) sei ein Brownscher Prozess mit Varianz 1. Das heißt, wir haben einen Gaußschen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, für den gilt:

$$(2) \qquad E(w(t_2) - w(t_1)) = 0 \qquad \text{und}$$

$$E((w(t_1) - w(t_2))^2) = |t_2 - t_1| .$$

Die Wahl eines Brownschen Prozesses als zufällige Störung ist nicht willkürlich. Im Gegenteil müssen wir sogar einen Brownschen Prozess wählen, wenn wir mit Wahrscheinlichkeit 1 einen stetigen Pfad für x(t) erhalten wollen.

Integrieren wir (1) formal, so ergibt sich

$$(3) \qquad x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} g\, dt' + \int_{t_0}^{t} \sigma\, dw(t'),$$

Das erste Integral macht keine Schwierigkeiten; es ist ein ganz normales Zeitintegral; da aber der Brownsche Prozess in keinem endlichen Zeitintervall von beschränktes Variation ist, müssen wir das zweite Integral als stochastisches Integral auffassen. (siehe Joseph L. Doob, 1953, IX.2).

Um mit Wahrscheinlichkeit 1 stetige Realisationen des x(t) Prozesses zu erhalten, genügt die Annahme "w(t) ist ein Brownscher Prozess" noch nicht. Wir müssen noch Zusatzannahmen über g und σ machen.

Im Intervall $0 \leq t \leq T$ gelte:

$$\left.\begin{aligned} &(a) \quad |g_i(t,\bar{x},y,z)| \leq K\,(1+\bar{x}^2)^{1/2}, \\ &(b) \quad 0 \leq \sigma_{ij}(t,\bar{x},y,z) \leq K\,(1+\bar{x}^2)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \quad i,j = 1,\ldots,n,$$

Außerdem müssen g und σ eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung erfüllen:

$$(c) \quad |g_i(t,\bar{x}_2, y_2, z_2) - g(t, \bar{x}_1, y_1, z_1)| \leq K\,|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|,$$

$$(d) \quad |\sigma_{ij}(t, \bar{x}_2, y_2, z_2) - \sigma_{ij}(t, \bar{x}_1, y_1, z_1)| \leq K\,|\bar{x}_2 - \bar{x}_1|,$$

$$i, j = 1,\ldots,n,$$

Unter diesen zusätzlichen Bedingungen erhalten wir mit Wahrscheinlichkeit 1 stetige Realisationen des x(t) Prozesses.

Weiter brauchen wir noch die Annahme,

(e) g und σ seien stetig in allen Argumenten.

Als Auszahlfunktion müssen wir den Erwartungswert der Auszahlung nehmen:

$$(4) \qquad P(t_o, x_o, Y, Z) = \mathcal{E}\Big(\int_{t_o}^{T} f(t,x, Y(t,x), Z(t,x))\, dt + h(x(T)) \Big)$$

Da wir nicht wissen, wie sich dieses Spiel analog zu 1.2 formulieren läßt, werden wir eine neue Methode anwenden. Dazu gehen wir zu diskreter Zeit über.

Für m = 1, 2, ... definieren wir dann eine Folge von zeitdiskreten Spielen. Nennen wir den Wert dieser Spiele $W_m(t_o, x_o)$. Die Spiele werden dann für Zeitpunkte $t_o = \frac{(k-1)T}{m}$ untersucht, wobei k = 1,..., m.
Das diskrete Analogon der Gleichung (1) ist:

$$(5) \qquad x_{k+1} = x_k + \delta\, g\Big(\frac{(k-1)T}{m}, x_k, y_k, z_k\Big) + \delta^{1/2}\, \sigma\Big(\frac{(k-1)T}{m}, x_k, y_k, z_k\Big)\, r_{(k)}.$$

Dabei ist δ die Schrittweite der Unterteilungen von $[0,T]$. Wir nehmen $\delta = T/m$.

Da wir für w(t) einen Brownschen Prozess gewählt hatten, ist r_k eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Die Wahl von $\delta^{1/2}$ folgt aus der Eigenschaft (2). Setzen wir in (1) oder (5) die Matrix G gleich der Nullmatrix, so erhalten wir die bis jetzt untersuchten deterministischen Differentialspiele. Beim Übergang zu diskreter Zeit geht das Integral (4) in eine Summe über.

Das diskrete Spiel, das wir definieren werden, ist ein Minorantenspiel. Darin wird das Informationsmuster zugunsten des minimierenden Spielers abgeändert. Falls beide Spieler gleichzeitig ziehen dürften, würde dies zu gemischten Strategien führen. Dies soll jedoch vermieden werden. In unserem Spiel muß also Spieler I, der maximierende, zuerst ziehen; Spieler II erhält das Resultat dieses Zuges und trifft dann seine Wahl. Wir untersuchen also ein Maximin-Problem. Ebenso ließe sich ein Majorantenspiel definieren, das zu dem entsprechenden Minimax-Problem führen würde. (Fleming, 1961, S. 102).

Für ein vorgegebenes m und einen Ausgangspunkt x_o definieren wir für $t_o = \frac{(k-1)T}{m}$ mit k = 1,..., m - wir werden diese Zeitpunkte auch t_k nennen - ein stochastisches Spiel mit 2(m-k+1) Zügen bei gegebener Ausgangssituation (t_o, x_o). Die Züge sind folgendermaßen numeriert: 2k - 1, 2k,..., 2m. Beim Zug 2k - 1 wählt der maximierende Spieler ein y_k aus $\mathcal{Y}$ und beim darauffolgenden Zug 2k wählt der minimierende Spieler ein z_k aus $\mathcal{Z}$, und so wird weiter verfahren bis zum Zug 2m.

Für $k \leq i \leq m$ wird der Zustand des Spieles x_{i+1} aus dem System (6) von stochastischen Differenzengleichungen ermittelt:

$$x_{i+1} = x_i + \delta g(t_i, x_i, y_i, z_i) + \delta^{1/2} \sigma(t_i, x_i, y_i, z_i) \tau_{(i+1)} . \tag{6}$$

Beim Zug 2i-1 oder 2i sind den Spielern alle vorhergehenden Züge und auch die Werte der Realisierungen der Zufallsvariablen r bis zum Index (i-1) bekannt.
Nach Beendigung des Spieles erhält Spieler I die Auszahlung

$$\mathcal{E}(\delta \sum_{i=k}^{m} f(t_i, x_i, y_i, z_i) + h(x_{m+1})). \tag{7}$$

Spieler II erhält den negativen Wert von (7). Für den Wert des Spieles ergibt sich für die zulässigen Ausgangspositionen (t_o, x_o) die folgende Rekurrenzrelation:

$$W_m(t_o, x_o) = \max_y \min_z \mathcal{E}(\delta f + W_m(t_o+\delta, x_o+\delta g+ \delta^{1/2} \sigma r)). \tag{8}$$

Die Komponenten des n-dimensionalen Vektors r sind paarweise unabhängige Gaußsche Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Vaianz 1.

Nun wollen wir die Wertfunktion $W_m(t_o+\delta, x_o+\delta g+ \delta^{1/2} \sigma r)$ formal in eine Taylorreihe um (t_o, x_o) entwickeln. Unser Ziel ist es, ein stochastisches Analogon zur Gleichung von Isaacs zu erhalten. Die partielle Differenzialgleichung, die

wir erhalten werden, ist von komplizierterer Natur als die von Isaacs. Wir erhalten keine linearen, sondern unter bestimmten Voraussetzungen parabolische partielle Differentialgleichungen.

Seien $(g_1, \ldots, g_n)$ die Komponenten von g und σ_{ij} die Komponenten der Matrix σ und $x_o = (x_{1o}, \ldots, x_{no})$. Damit erhalten wir folgende Taylorentwicklung:

$$
\begin{aligned}
& W_m(t_o + \delta,\ x_o + \delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r) = \\
& = W_m(t_o, x_o) + W_{mt_o}(t_o, x_o) + \\
& + \sum_{i=1}^{n} \Big(\delta g_i + \sqrt{\delta} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} r_j \Big) \frac{\partial}{\partial x_{io}} W_m(t_o, x_o) + \\
& + \Big(\delta \frac{\partial}{\partial t_o} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\delta g_i + \sqrt{\delta} \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} r_j \Big) \frac{\partial}{\partial x_{io}} \Big)^2 W_m(t_o, x_o) \\
& + \text{Restglied} .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Das Restglied ist mindestens von der Ordnung $o(\delta)$.

Unser Ziel ist es, dies in (8) einzusetzen. Wenn wir dann den Erwartungswert bilden, können wir durch δ dividieren und dann m gegen Unendlich gehen lassen. Haben wir dies vor Augen, so brauchen wir in den Detailrechnungen Glieder, in denen δ von höherer Ordnung als 1 vorkommt, nicht besonders berücksichtigen. Diese verschwinden, da, wenn $m \to \infty$, auch $\delta \to 0$.

Behandeln wir zuerst den letzten Ausdruck. Wir müssen uns darin lediglich mit dem Term befassen, der $\sqrt{\delta}$ als Faktor enthält. Die Terme, in denen δ nicht von höherer Ordnung als 1 vorkommt, sind

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}\,r_j\right)\frac{\partial}{\partial x_{io}}\right)^2 W_m(t_o, x_o) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_{1j}\,r_j\,\frac{\partial}{\partial x_{1o}}\cdot\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\sigma_{i\ell}\,r_\ell\,\frac{\partial}{\partial x_{io}}\right) W_m(t_o, x_o) +$$

$$\vdots$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_{nj}\,r_j\,\frac{\partial}{\partial x_{no}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\sigma_{i\ell}\,r_\ell\,\frac{\partial}{\partial x_{io}}\right) W_m(t_o, x_o) =$$

$$= \sum_{j,i,\ell}^{m}\sigma_{1j}\sigma_{i\ell}\,r_j\,r_\ell\,\frac{\partial^2}{\partial x_{1o}\partial x_{io}}\,W_m(t_o, x_o)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j,i,\ell}^{m}\sigma_{nj}\sigma_{i\ell}\,r_j\,r_\ell\,\frac{\partial^2}{\partial x_{no}\partial x_{io}}\,W_m(t_o, x_o)$$

Denken wir wieder an die Bildung des Erwartungswertes. Dabei fallen die Glieder mit verschieden datierten $r_i r_j$ heraus. Die Zufallsvariablen r_i und r_j sind ja nach Voraussetzung unabhängig, mit $\mathcal{E}(r_i) = 0$.
Die einzigen Terme, die dann noch bleiben, sind

$$\sum_{i,j}^{m}\sigma_{1j}\sigma_{ij}\,r_j^2\,\frac{\partial^2}{\partial x_{1o}\partial x_{io}}\,W_m(t_o, x_o),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,j}^{m}\sigma_{nj}\sigma_{ij}\,r_j^2\,\frac{\partial^2}{\partial x_{no}\partial x_{io}}\,W_m(t_o, x_o).$$

Benennen wir nun die Indices um, und zwar j in k und i in j.

Dann können wir obige Ausdrücke kürzer schreiben, nämlich:

$$(10) \qquad \sum_{i,j,k}^{n} \sigma_{ik}\, \sigma_{jk}\, r_k^2\, W_{mx_{io}x_{jo}}.$$

Setzen wir (9) in (8) ein und bilden den Erwartungswert. Da $E(r_k^2) = 1$ für $k = 1, \ldots, n$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} W_m(t_o, x_o) = {} & W_m(t_o, x_o) + \delta W_{mt_o}(t_o, x_o) + \\ & + \max_y \min_z \Big(\delta f + \delta g^t W_{mx_o}(t_o, x_o) + \\ & + \delta \sum_{i,j,k}^{n} \sigma_{ik}\, \sigma_{jk}\, W_{mx_{io}x_{jo}} + \\ & + \text{Glieder, die } \delta \text{ mit einer größeren} \\ & \quad \text{Potenz als 1 zum Faktor haben.} \end{aligned}$$

Nun dividieren wir durch $\delta > 0$ und lassen m unbeschränkt zunehmen. Auf diese Weise erhalten wir für die Grenzfunktion v die folgende partielle Differentialgleichung

$$(11) \qquad \begin{aligned} & v_{t_o}'(t_o, x_o) + \max_y \min_z \Big(f + g^t\, v_{x_o}(t_o, x_o) + \\ & + \sum_{i,j,k}^{n} \sigma_{ik}\, \sigma_{jk}\, v_{x_{io}x_{jo}} \Big) = 0. \end{aligned}$$

Gilt $\sigma = 0$, so haben wir abermals die Gleichung von Isaacs für den deterministischen Fall. Die Funktionen f, g und σ werden dabei an der Stelle (t_o, x_o, y, z) ausgewertet.

Definieren wir eine Matrix a auf folgende Weise:

$$(12) \qquad a = (a_{ij}) = \sigma\sigma^t = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\, \sigma_{jk} \Big).$$

Dann ist a symmetrisch. Falls a auch noch positiv-definit ist, ergibt sich für (11) eine parabolische Differentialgleichung. Das Heißt, unter Umständen (gar nicht einmal immer dann) lassen sich dafür Lösungsverfahren angeben.

6.2 Ein Konvergenzsatz

In diesem Abschnitt wollen wir unter sehr einschränkenden Bedingungen die Konvergenz von $W_m(t_o, x_o)$ gegen die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(13) \qquad L(v) + g\, v_x + f = 0$$

zeigen. Der partielle Differentialoperator ist dabei mit Hilfe von (12) definiert.

$$(14) \qquad L(v) = \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\, v_{x_i x_j} + v_{t_o} \ .$$

Als Randbedingung für (13) nehmen wir

$$v(T,x) = h(x(T)) = W_m(T,x) \qquad \text{für alle } m = 1,2,\ldots$$

Die Gleichung (13) besitzt unter gewissen Voraussetzungen Lösungen vom Typ bedingter Erwartungswerte.

$$v(t_o, x_o) = \mathfrak{E}\Big(\int_{t_o}^{T} f\, dt + h(x(T)) \,\Big|\, x(t_o) = x_o \Big).$$

Dies ist das Gegenstück zu (4). Bilden wir von (13) das Maximin, so wird dies das Analogon zu (11).

Die Voraussetzungen des folgenden Satzes sind der Grund, warum wir eine Theorie der Differentialspiele nicht

auf Approximation durch diskrete Spiele aufgebaut haben.

Satz 1 Seien g und σ komponentenweise beschränkt und sei $v(t_o, x_o)$ eine dreimal stetig differenzierbare Lösung von (11), dann konvergiert auf dem Intervall $[0,T]$ der Wert des diskreten Spieles $W_m(t_o, x_o)$ gleichmäßig gegen $v(t_o, x_o)$ für $m \to \infty$.

Beweis:

Zuerst entwickeln wir $v(t_o + \delta, x_o + \delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r)$ in eine Taylorreihe. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
& v(t_o + \delta, x_o + \delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r) = v(t_o, x_o) + \\
& + v_{t_o}(t_o, x_o)\cdot\delta + v_{x_o}(t_o, x_o)\,(\delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r) + \\
& + 1/2 \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_{io}x_{jo}}\,(\delta g_i + \sqrt{\delta} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} r_k)\,(\delta g_j + \sqrt{\delta} \sum_{l=1}^{n} \sigma_{jl} r_l) + \\
& + 1/2\, v_{t_o t_o}(t_o, x_o)\,\delta^2 + 1/2 \sum_{i=1}^{n} v_{t_o x_{io}}\,\delta\,(\delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r) + \\
& + \text{Restglied}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Für dieses Restglied können wir eine Konstante A_1 so wählen, daß es kleiner als $A_1 \delta^{3/2}$ ist.
Nun berechnen wir mit Hilfe von (15)

$$
\begin{aligned}
& E(v(t_o + \delta, x_o + \delta g + \sqrt{\delta}\,\sigma r)) = \\
& = v(t_o, x_o) + v_{t_o}(t_o, x_o)\cdot\delta + v_{x_o}(t_o, x_o)\,\delta g +
\end{aligned}
$$

$$(16) \qquad + \delta^2/2 \left(\sum_{i,j} g_i g_j v_{x_{io} x_{jo}} + v_{t_o t_o} + v_{t_o x_o} \cdot g \right) +$$

$$+ \delta \sum_{i,j,k} \sigma_{ik} \sigma_{jk} v_{x_{io} x_{jo}} (t_o, x_o) + A_1 \delta^{3/2}.$$

Der Ausdruck in der dritten Zeile von (16) läßt sich durch eine Konstante $A_2 \delta^2$ abschätzen.

Nun setzen wir $A = A_1 + A_2$.

Jetzt möchten wir die Abschätzung

$$(17) \qquad W_m(t_o, x_o) \leq v(t_o, x_o) + A(T - t_o)\, \delta^{1/2}$$

durch Induktion über die Anzahl der Züge zeigen. t_o durchläuft die Werte $\frac{(k-1)T}{m}$; $k = 1, \ldots, m$. Die Induktion verläuft dabei in umgekehrter Richtung.

(a) Die Annahme (17) ist richtig für $t_o = T$. An dieser Stelle ist W_m und v gleich $h(x(T))$.

(b) Nun nehmen wir an, (17) gelte an der Stelle $t_o + \delta$.

(c) Sei y^* ein $(2k - 1)$ter optimaler Zug für Spieler I. An der Stelle (t_o, x_o, y^*, z) gilt wegen (8)

$$W_m(t_o, x_o) \leq \mathfrak{E}(\delta f + W_m(t_o + \delta, x + \delta g + \sqrt{\delta}\, \sigma r))$$

Nach Induktionsannahme gilt jetzt

$$W_m(t_o, x_o) \leq \mathfrak{E}(\delta f + v(t_o + \delta, x + \delta g + \sqrt{\delta}\, \sigma r) + A(T - t_o - \delta)\, \delta^{1/2}).$$

Wegen (16) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
W_m(t_o, x_o) \leq\ & \delta f + v(t_o, x_o) + v_{t_o}(t_o, x_o)\,\delta + \\
(18)\quad & + v_{x_o}(t_o, x_o)\,\delta g + \sum_{i,j,k=1}^{n} \sigma_{ik}\,\sigma_{jk}\, v_{x_{io}x_{jo}}(t_o, x_o) + \\
& + A_1 \delta^{3/2} + A_2 \delta^2 + A(T - t_o - \delta)\,\delta^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Nun wählt der Spieler II ein z^*, das $f + g v_{x_o}(t_o, x_o) + \sum_{i,j,k=1}^{n} \sigma_{ik}\,\sigma_{jk}\, v_{x_{io}x_{jo}}$ minimiert. Da v eine Lösung von (11) ist, erhalten wir aus (18):

$$
\begin{aligned}
& W_m(t_o, x_o) \leq v(t_o, x_o) + A_1 \delta^{3/2} + A_2 \delta^2 + \\
& + A(T - t_o - \delta)\,\delta^{1/2} \leq v(t_o, x_o) + A\delta\,\delta^{1/2} + \\
& + A(T - t_o - \delta)^{1/2} = v(t_o, x_o) + A(T - t_o)\,\delta^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$
(19)\qquad W_m(t_o, x_o) \geq v(t_o, x_o) - A(T - t_o)\,\delta^{1/2}.
$$

Damit erhalten wir Satz 1.

Wie wir sehen, ist diese Methode kein sehr geeigneter Zugang zur Theorie der Differentialspiele. Wie wir in 1 - 3 sahen, liegen die wesentlichen Schwierigkeiten der Theorie auf den Mannigfaltigkeiten, auf denen die partiellen Ableitungen der Wertfunktion nur als einseitige Limiten existieren. Gehen wir aber bei Gleichung (11) bzw. (13) von

strengen Regularitätsforderungen für die Lösung ab, so werden diese im allgemeinen nicht eindeutig sein, und es lassen sich dann mit Hilfe dieser Theorie keine Aussagen mehr machen. Dies gilt sogar schon für den nicht stochastischen Fall (L. D. Berkowitz, 1967, S. 342).

Literaturverzeichnis

Lehrbücher:

Bellman, Richard: Dynamic Programming.
Princeton University Press, 1957.

derselbe: Introduction to Matrix Analysis.
McGraw-Hill, 1960.

Bieberbach, Ludwig: Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet.
Springer, 1956.

Burger, Ewald: Einführung in die Theorie der Spiele.
Walter de Gruyter & Co., 1959.

Doob, Joseph L.: Stochstic Processes.
Wiley, 1953.

Isaacs, Rufus: Differential Games.
Wiley, 1965.

Karlin, Samuel: Mathematical Methods in Games, Programming and Economics, Bd. 2.
Addison-Wesley, 1959.

Pontrjagin, Lev S. u.a.: Mathematische Theorie optimaler Prozesse.
Oldenburg, 1967.

Einzelarbeiten und Sammelbände:

Berkovitz, Leonard D.: A variational approach to differential games.
in: Annals of Mathematics Study, Nr. 52, Princeton University Press, 1964, 127-174.

derselbe: A differential game with no pure strategy solution.
in: Annals of Mathematics Study, Nr. 52, Princeton University Press, 1964, 175-194.

derselbe: Necessary conditions for optimal strategies in a class of differential games and control problems.
in: SIAM Journal on Control, Nr. 5, 1967, 1-24.

derselbe: A survey of differential games.
in: Mathematical Theory of Control, hrsg. von A. V. Balakrishnan und L. W. Neustadt, Academic Press, 1967, 342-372.

derselbe und Dreyfus, Stuart E.: A dynamic programming approach to the nonparametric problem in the calculus of variation.
in: Journal of Mathematics and Mechanics, Nr. 15, 1966, 83-100.

derselbe und Fleming, Wendell H.: On differential games with integral payoff.

in: Annals of Mathematics Study, Nr. 39, Princeton University Press, 1957, 413-433.

Fleming, Wendell H.: A note on differential games of prescribed duration.
in: Annals of Mathematics Study, Nr. 39, Princeton University Press, 1957, 407-412.

derselbe: The convergence problem for differential games.
in: Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nr. 3, 1961, 102-116.

derselbe: The convergence problem for differential games II.
in: Annals of Mathematics Study, Nr. 52, Princeton University Press, 1964, 195-210.

derselbe: The Cauchy problem for degenerate parabolic equations.
in: Journal of Mathematics and Mechanics, Nr. 13, 1964, 987-1008.

derselbe: Optimal control of diffusion processes.
in: Functional Analysis and Optimisation, hrsg. v. E. R. Caianiello, Academic Press, 1966, 68-84.

Hurwicz, Leonid: Programming in linear Spaces.
in: Studies in Linear and Non-Linear Programming, hrsg. v. K. J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, Stanford University Press, 1958, 38-102.

Isaacs, Rufus: Differential Games I, II, III, IV. The RAND Coperation, RM 1391, 1399, 1411, 1486; 1954.

Pontrjagin, Lev S.: On some differential games. in: Soviet Math. Dokl., Nr. 5, 1964, 712-716.

derselbe: On the theory of differential games. in: Uspekhi Math. Nauk., Nr. 21, 1966, 219-274.

derselbe: Linear differential games I. in: Soviet Math. Dokl., Nr. 8, 1967, 769-771.

derselbe: Linear differential games II. in: Soviet Math. Dokl., Nr. 8, 1967, 910-912.

derselbe und E. F. Miscenko: Linear differential games. in: Soviet Math. Dokl., Nr. 8, 1967, 585-588.

Sakawa, Yoshiyuki: On linear differential games. in: Mathematical Theory of Control, hrsg. v. A. V. Balakrishnan, L. W. Neustadt, Academic Press, 1967, 273-283.

Scarf, Herbert E.: Games with survival payoff. in: Annals of Mathematics Study, Nr. 39, Princeton University Press, 1957, 393-405.

Zachrisson, Lars E.: Markov games. in: Annals of Mathematics Study, Nr. 52, Princeton University Press, 1964, 211-253.

Zieba, A.: An example in pursuit theory.
in: Studia Mathematica, Nr. 22, 1962, 1-6.

L e b e n s l a u f

Am 14. Juni 1942 wurde ich, Hartmut Hauptmann, als Sohn des Dr. med. Hartmut Hauptmann in Brunnersdorf geboren. In Weidenbach besuchte ich die Volksschule von 1948-1952, in Ansbach die Oberrealschule Klasse 1-6, in Gunzenhausen Klasse 7-9. Abitur Juli 1961. Ab WS 1961/62 studierte ich Mathematik an der Universität München. Diplomhauptprüfung WS 1965/66. Parallel zu meinem Mathematikstudiom begann ich im WS 1965/66 Betriebswirtschaftslehre zu studieren. Das Studienjahr 1966/67 verbrachte ich als Fulbright-Stipendiat am Georgia Institute of Technology in den USA. Seit 1. November 1967 arbeite ich als VWA am Seminar für Ökonometrie und Statistik bei Herrn Professor Dr. E. M. Fels.